≫ 8月の宿題 ≪

問題 基本周期が6の数列$\{a_n\}$と基本周期が10の数列$\{b_n\}$があるとき，$\{a_n+b_n\}$の基本周期はいくつか．考えられるものをすべてあげよ．

（出題：青木亮二）

▶数列3，5，3，5，3，5，3，5，……の周期は2，4，6，……で，基本周期は2です．
応募規定：本誌大（B5）のレポート用紙を使い，**レポートの初めに**住所，氏名，学校名・学年 or 職業，電話番号を明記し，**8月15日**（消印有効）までに，東京出版≪宿題≫係宛に郵送して下さい．発表は10月号です．問題を解いた感想や拡張などもお待ちしています．◀

6月の≪宿題≫レポート発表

（出題・解説：青木亮二）

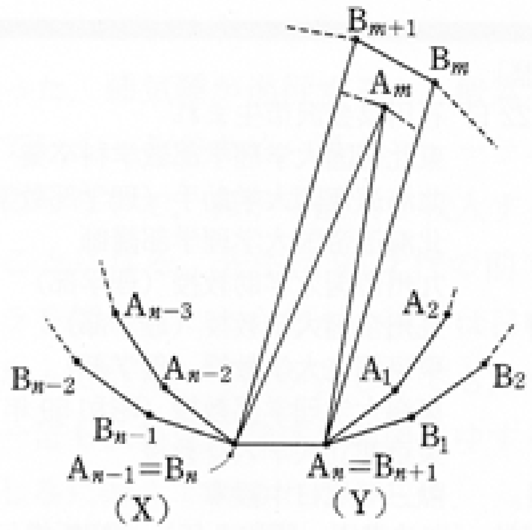
問題 1辺の長さが1の正n角形をP_nとする．P_nをうまく配置して，P_{n+1}の内部（周を含む）に置くことが可能である3以上の自然数nをすべて求めよ．

出題の仕方が多少意地悪ではあったものの，「3以上の全ての自然数nで題意が成立」は直感で分かったことだろう．ただ，この「明らかな」ことをどう示せば良いのか，がなかなか難しいところだったようで，応募者の数，特に高校生の応募は非常に少なかった．想定内，という言葉が少し流行ったが，今回の問題については，応募者が少なかったという想定外，だが実にさまざまな解法を頂いたという想定外，三角関数の近似が実は意外と大変という想定外．私にとっては想定外のオンパレードになってしまった．

ではさっそくレポートを紹介してゆくことにしよう．まずは，中学生顔負けの，幾何的アプローチによる解法だ．以下，P_nの頂点をA_1，A_2，…，A_n，P_{n+1}の頂点をB_1，…，B_{n+1}とし，「図形Pの内部」とは，Pの周も含むものとする．

≪多田寛之氏（講師）のレポートより≫

図のように，A_{n-1}とB_n，A_nとB_{n+1}が一致し，残りの頂点が直線$A_{n-1}A_n$に関して同じ側になるよう，P_n，P_{n+1}を配置する．説明と理解のため，A_{n-1}（$=B_n$）をX，A_n（$=B_{n+1}$）をYと表すことにする．



対称性より，「$1\leqq m\leqq\dfrac{n-1}{2}$のときの点$A_m$が$P_{n+1}$内にある…①」ことを示せば，$P_n$の全ての頂点が$P_{n+1}$内にあることが言え，$P_{n+1}$の凸性より，$P_n$の辺上の全ての点が$P_{n+1}$の内部にあることが言えるので，3以上の全ての自然数nで題意が成立することが示される．

①を示すために，①より強い主張「$1\leqq m\leqq\dfrac{n-1}{2}$のとき，点$A_m$は三角形$XB_mB_{m+1}$の内部にある…②」を証明しよう．以下，$1\leqq m\leqq\dfrac{n-1}{2}$とする．

（証明） まず，$\overline{XY}$と$\overline{XA_m}$のなす角は$\dfrac{m\pi}{n}$，$\overline{XY}$と$\overline{XB_m}$のなす角は$\dfrac{m}{n+1}\pi$であるから，

$\dfrac{m}{n+1}\pi<\dfrac{m}{n}\pi<\dfrac{m+1}{n+1}\pi$の成立より，$A_m$は，2つの半直線$XB_m$，$XB_{m+1}$で挟まれた領域$W_m$に存在する…③とわかる．

次に，$YA_m\leqq YB_m$…④ が成立することを示す．帰納法によって証明する前に準備をしておこう．

準備 YA_mを，$\triangle YA_1A_m$の辺と捉えると，

$\angle A_1YA_m=\dfrac{m-1}{n}\pi$，$\angle YA_mA_1=\dfrac{\pi}{n}$より，

$\angle YA_1A_m=\dfrac{n-m}{n}\pi$．これを$\alpha_m$とおく．また，

$A_1A_m=YA_{m-1}$，$YA_1=1$である．

同様に，YB_mを$\triangle YB_1B_m$の辺と捉えると，

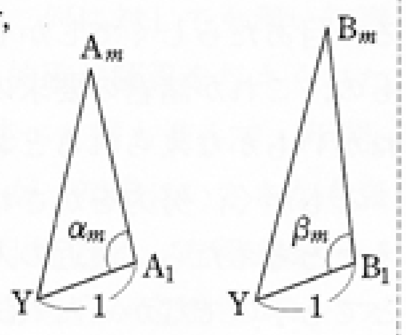
$\angle YB_1B_m=\beta_m=\dfrac{n-m+1}{n+1}\pi$，

$B_1B_m=YB_{m-1}$，$YB_1=1$

がわかる．大小を比較することで，

$90°<\alpha_m<\beta_m<180°$…⑤

もわかる．



さて，（ｉ） $m=1$ のとき，等号成立ゆえ，④は成立．

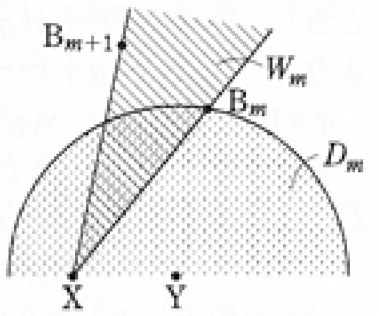
（ii） $m=k-1$ （$k=2,\ 3,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}$）のとき，④が成立すると仮定する．２つの三角形 $\triangle \mathrm{YA_1A}_k$，$\triangle \mathrm{YB_1B}_k$ に余弦定理を用いて，

$$\begin{cases} \mathrm{YA}_k{}^2=1+\mathrm{YA}_{k-1}{}^2-2\mathrm{YA}_{k-1}\cos\alpha_{k-1} \\ \mathrm{YB}_k{}^2=1+\mathrm{YB}_{k-1}{}^2-2\mathrm{YB}_{k-1}\cos\beta_{k-1} \end{cases}$$

帰納法の仮定と⑤より，$\mathrm{YA}_k{}^2<\mathrm{YB}_k{}^2$ がいえ，$m=k$ のときも④が成立する．

（ｉ），（ii）から，数学的帰納法より④が示された．

このことから，点 A_m は，Y を中心とする，半径 YB_m の円の内部 D_m にあることが分かる．$\angle \mathrm{YB}_m\mathrm{B}_{m+1}\geqq 90°$ であることから，W_m，D_m の共通部分は $\triangle \mathrm{XB}_m\mathrm{B}_{m+1}$ の内部に含まれるので，その共通部分に存在する点 B_m は $\triangle \mathrm{XB}_m\mathrm{B}_{m+1}$ の内部に存在し，よって②は示された．■



効率の良い置き方として，一辺を重ねて配置する方法ともう一つ，２つの正多角形の重心を一致させる方法がある．ただしこの場合，n が小さいと配置不可能なので，そのケースは各論で示すしかない．

≪上野雄一朗（熊本市）氏のレポートより≫

P_n の外接円の半径，内接円の半径を R_n，r_n とする．

$R_n\leqq r_{n+1}$ …⑥ であれば，P_n，P_{n+1} の重心を一致させることで，P_n を P_{n+1} の内部に配置することができる．⑥を満たすような n を求めよう．

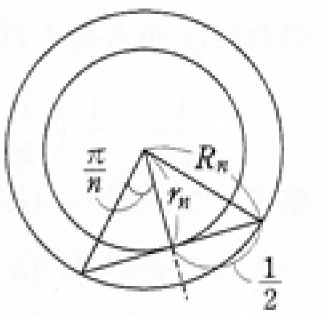
まず，図より，

$$R_n=\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{n}},\quad r_n=\frac{1}{2\tan\dfrac{\pi}{n}}$$

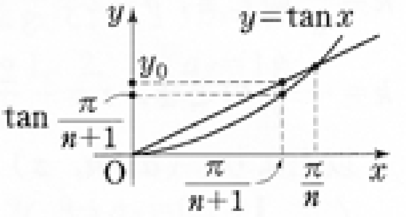
だから，

$$⑥\iff \sin\frac{\pi}{n}-\tan\frac{\pi}{n+1}\geqq 0$$

………⑦



$y=\tan x$ のグラフは $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で下に凸だから，図より，



$$\tan\frac{\pi}{n+1}<y_0=\frac{\tan\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n+1}=\frac{n}{n+1}\tan\frac{\pi}{n}\quad\cdots\cdots⑧$$

ゆえに，（⑦の左辺）

$$>\sin\frac{\pi}{n}-\frac{n}{n+1}\tan\frac{\pi}{n}=\tan\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}-\frac{n}{n+1}\right)$$

$\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$ が $x>0$ で成り立つ（両辺を微分してみよ）ことから，

$$\cos\frac{\pi}{n}-\frac{n}{n+1}>1-\frac{\pi^2}{2n^2}-\frac{n}{n+1}=\frac{2n^2-\pi^2(n+1)}{2n^2(n+1)}$$

右辺の分母は正であり，分子を n の２次関数とみると，軸は $n=\dfrac{\pi^2}{4}\fallingdotseq 2.47$ である．$n=6$ のとき，

（分子）$=72-7\pi^2>72-7\cdot 3.2^2=0.32>0$ だから，$n\geqq 6$ で⑥が成立することがわかる．また，$n=5$ のとき，

$$⑦\iff \sin\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{6}\geqq 0$$

$\sin\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，

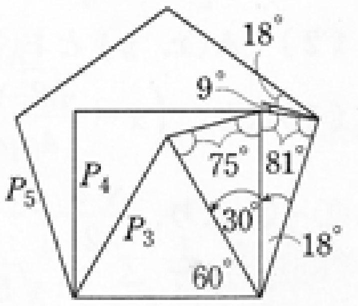
$$\sin\frac{\pi}{5}\geqq\tan\frac{\pi}{6}\iff\frac{5-\sqrt{5}}{8}\geqq\frac{1}{3}$$

$$\iff 7\geqq 3\sqrt{5}\iff 49\geqq 45$$

だから，$n=5$ のときも⑥は成立．

よって，$n\geqq 5$ のとき，⑥が成立することが分かる．

$n=3$，4 の場合，題意が成立することは図よりわかるので，3 以上の全ての自然数 n で題意は成立することが分かる．■



⑦式自体は，$x\fallingdotseq 0$ のとき，$\sin x\fallingdotseq x$，$\tan x\fallingdotseq x$ であることから，「ある程度大きい n」で成立することはわかる．実際にパソコンなどで，$\sin\dfrac{\pi}{n}$，$\tan\dfrac{\pi}{n+1}$ の大小を調べた人も多かったことだろう．調べてみると，⑦式が $n\geqq 5$ で成立するだろうことは分かるのだが，それを示すための近似の方法に，（私はもちろん）多くの人が苦しんだようだ．その中で，上野さんのレポートは⑧式の評価が微妙絶妙であった．⑧式の評価は，私も全く気付いていなかったので，なかなかうれしく思った．こんなサプライズに遭遇して，「想定の範囲内」なんてクールなこと，かっこ悪くて私には言えないので，素直に「脱帽」としておきます．

応募者 19 名中，正解・準正解者は以下の 17 名

［正解］ 甲斐亘（ラ・サール 2），**大城慶浩（志学館卒）**，東岡和彦（学生），矢野好輝（京大），黒澤正信（東京都練馬区），小林保雄（鳥取県），**上野雄一朗（熊本市）**，**多田寛之（講師）**，清洲早紀（京都市左京区），浜田一志（塾経営），清水政明（予備校講師），猪塚憲機（医師），松村尚明（山口県周東町），林道宏（福岡県豊前市），小林博省（長野県飯田市）

［準正解］ 太田吉雄（山形市），平岩治司（公務員）

（太字の方にバインダー贈呈）

12月の宿題

問題 n を3以上の自然数とする．A を $n+1$ 個，Y を n 個を無作為に並べて順列を作るとき，“AYA”の現れる個数の期待値を求めよ．ただし，“AYAYA”，“AYAYAYA”，“AYAYA……YA”とつながるものは“AYA”のうちに数えないものとする．たとえば，“AAAYAYYAYAYYAYAYA”には“AYA”が2個現れている．

▶付帯条件がないとすれば簡単ですが…….
応募規定：本誌大（B5）のレポート用紙を使い，**レポートの初め**に住所，氏名，学校名・学年 or 職業，電話番号を明記し，**12月15日**（消印有効）までに，東京出版≪宿題≫係宛に郵送して下さい．発表は2月号です．問題を解いた感想や拡張などもお待ちしています．◀

10月の≪宿題≫レポート発表

（出題：編集部・解説：條　秀彰）

問題 △ABC とその外接円 O がある．△ABC を円 O に沿って θ 回転したものを △DEF とする．A，B，C はそれぞれ D，E，F に対応し，これらの点は円周上に A，D，B，E，C，F の順に並ぶものとする．ここで，AB と DE の交点を J，BC と EF の交点を K，CA と FD の交点を L とし，△ABC の垂心を H，△DEF の垂心を H′，△JKL の外心を O′ とする．

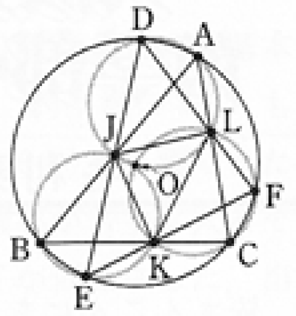
このとき，$\angle \mathrm{HO'H'}=2\theta$ であることを証明せよ．ただし，O′，H，H′ は，どの2点も互いに異なるものとする．

今回は，純粋な初等幾何の問題であったが，予想より多くの応募があり，うれしく思っている．解法は，図形的なもの，複素数などの計算によるものがほぼ同数であった．

本問で示すべき式に現れる3つの点のうち最も正体がわかりにくいのは H′ であろう．そもそも，△JKL とはどのような三角形なのだろうか．それをつきとめることから始める．

なお，本問を図形的に解くにあたって，「相似な図形に対して，それらの対応する部分どうしも相似である」という事実が重要になる．また，$\angle \mathrm{HO'H}=2\angle \mathrm{HOH'}$ を示すのだから，目標は「O′ が △HOH′ の外心であること」だ．これらの点に注意して解答を読んでいただきたい．

≪解1：山下博司（灘1）君のレポートより≫



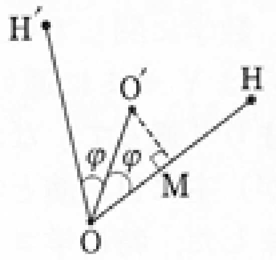
△DEF は △ABC を O のまわりに θ 回転したものだから，
$\angle \mathrm{DJA}=\angle \mathrm{DOA}=\angle \mathrm{DLA}=\theta$
よって，5点 A，D，J，O，L は共円．同様に，5点 B，E，K，O，J および5点 C，F，L，O，K も共円．これらの3円は，それぞれ △OAD，△OBE，△OCF（合同な三角形）の外接円なので，半径は等しい（r とする）．また，円 O の半径を R とおく．

正弦定理より，$\mathrm{LJ}=2r\sin A$，$\mathrm{JK}=2r\sin B$，$\mathrm{KL}=2r\sin C$．$\mathrm{BC}=2R\sin A$ などとあわせて，
LJ：JK：KL＝BC：CA：AB となり，

$$\triangle \mathrm{ABC}\backsim\triangle \mathrm{KLJ}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①.$$

次に，O が △KLJ の垂心であることを示す．文字の入れかえにより，$\mathrm{JO}\perp\mathrm{KL}$ のみ示せばよい．
$\triangle \mathrm{BJE}\equiv\triangle \mathrm{DJA}$（∵　BE＝DA で内角が等しい）から BJ＝DJ となり，BD の垂直2等分線は J，O をともに通るので，$\mathrm{JO}\perp\mathrm{BD}$ …②．また，$\angle \mathrm{FLK}=180^\circ-\angle \mathrm{FCK}=\angle \mathrm{BDF}$ から $\mathrm{BD}/\!/\mathrm{KL}$ …③．②，③から示された．

以上より，“△ABC と点 O と点 H”と“△KLJ と点 O′ と点 O”は相似な図形である．以下，$\theta=2\varphi$ と書く．



AB と DB のなす角が φ であることより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{KL}}$ のなす角は $180^\circ+\varphi$．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ のなす角は φ．また，
$\mathrm{OH}:\mathrm{OO'}=R:r$（相似比）

$$=\frac{\mathrm{AD}}{2\sin\varphi}:\frac{\mathrm{AD}}{2\sin 2\varphi}\ （正弦定理）$$
$$=2\cos\varphi:1$$

なので，O′ から OH に下ろした垂線の足を M とすると

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OO'}\cos\varphi=\frac{\mathrm{OH}}{2\cos\varphi}\cdot\cos\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{OH}$$

となり，M は OH の中点．よって，O′ は OH の垂直2等分線上にある．$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を 2φ 回転したものであることに注意すると，H と H′ は OO′ に関して対称．よって，O′ は OH′ の垂直2等分線上にもあり，O′ は △OHH′ の外心．これより，$\angle \mathrm{HO'H'}=2\angle \mathrm{HOH'}=2\theta$．▮

実は，△JKL は，△CAB と相似だったのである．この △JKL の特徴については，次の解法により，もっと明らかになる．なお，△JKL の外接円の半径 r' は

$$r'=\frac{\mathrm{JL}}{2\sin\angle \mathrm{JKL}}=\frac{\mathrm{JL}}{2\sin\angle \mathrm{CAB}}=r$$

から，r と等しくなる．これを用いた人もいた．筆者としては，“O が △JKL の垂心であることがわかりさえすればあとは一本道だ”と思っていたのだが，予想外に苦戦しているものが目立った．

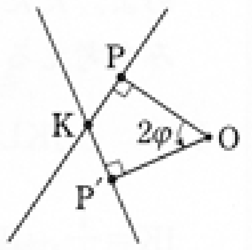
さて，次の解法のために１つ準備をしておこう．

［**補題**］　三角形 S の各辺の中点を３頂点とする三角形を T とすると，S の外心は T の垂心である．

証明は易しいので省略する．知らなかった人は，ぜひ頭に入れておいてほしい．

≪解２：岡村和樹（洛南３）君のレポートより≫

BC，EF の中点をそれぞれ P，P′ とおく．BC を θ（$=2\varphi$）回転したものが EF なので，右図から，



$$\angle \mathrm{KOP}=\varphi,\ \mathrm{KO}=\frac{\mathrm{PO}}{\cos\varphi}$$

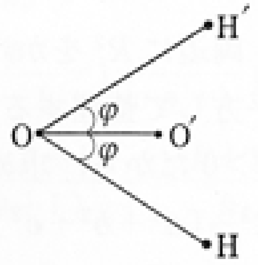
である．CA，AB の中点をそれぞれ Q，R とすると，同様にして，

$$\angle \mathrm{LOQ}=\varphi,\ \mathrm{LO}=\frac{\mathrm{QO}}{\cos\varphi},\ \angle \mathrm{JOR}=\varphi,\ \mathrm{JO}=\frac{\mathrm{RO}}{\cos\varphi}$$

よって，△KLJ∽△PQR∽△ABC となり，△KLJ は △PQR を，点 O のまわりに φ 回転させ，それを点 O を中心に $\dfrac{1}{\cos\varphi}$ 倍したものである．……④

△PQR の垂心が O なので（補題），④より，△KLJ の垂心も O である．よって，△PQR が，△ABC を 180° 回転し，1/2 倍に相似縮小したものであることもあわせて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $180°+\varphi$ 回転して $\dfrac{1}{2\cos\varphi}$ 倍したものが $\overrightarrow{\mathrm{O'O}}$ である．……⑤

△DEF の垂心 H′ は，H を，O を中心として 2φ 回転したものである．よって，



$\angle \mathrm{O'OH}=\angle \mathrm{O'OH'}=\varphi$ となり，

$$\mathrm{OO'}=\mathrm{OH}\times\frac{1}{2\cos\varphi}$$

であることから，O′ は △HOH′ の外心である．

よって，$\angle \mathrm{HO'H'}=2\angle \mathrm{HOH'}=2\theta$．　▮

解１では，O が △JKL の垂心であることを導くのに一苦労であったが，解２ではそれは自然に導かれる．△KLJ を，単に“△ABC と相似な三角形”とのみ捉えただけでなく，“△PQR を O のまわりに回転させ，相似拡大したもの”と捉え，その正体をより明らかにさせたためである．解２は，本問の本質を最もよく捉えた解法だと思う．この解法は７人いた．

最後に，計算による解法も簡単に紹介しておこう．本問では，「回転」がキーワードなので，（現行課程の範囲外であるが）複素数を用いるのが明快である．

≪解３：上野雄一朗（熊本市）氏のレポートより≫

複素数平面上で考える．

（補題１）　一直線上にない３点 0，z_1，z_2 からなる三角形の外心は，$z=\dfrac{z_1z_2(\overline{z_1}-\overline{z_2})}{\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}}$ で表される．

（補題２）　異なる４点 $\mathrm{A}_1(z_1)$，$\mathrm{A}_2(z_2)$，$\mathrm{A}_1'(z_1\omega)$，$\mathrm{A}_2'(z_2\omega)$（$|\omega|=1$，$\omega\neq\overline{\omega}$）について，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と $\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'$ の交点は，$z=\dfrac{\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}\cdot\dfrac{\omega-1}{\omega-\overline{\omega}}$ で表される．

（いずれも，単純計算により確認できるので，証明は省略する）

さて，O を原点とし，各頂点を表す複素数を，対応する小文字で表す．また，$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$（$\omega\neq\overline{\omega}$）とする．まず，$h=a+b+c$（有名事実）であり，$\mathrm{D}(a\omega)$，$\mathrm{E}(b\omega)$，$\mathrm{F}(c\omega)$，$h'=h\omega$．

△OHH′ の外心を $\mathrm{T}(t)$ とすると，（補題１）より，

$$t=\frac{h\cdot h\omega(\overline{h}-\overline{h}\overline{\omega})}{\overline{h}\cdot h\omega-h\cdot\overline{h}\overline{\omega}}=\frac{h\omega(1-\overline{\omega})}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{h(\omega-1)}{\omega-\overline{\omega}}$$

一方，（補題２）より，

$$j=\frac{\overline{a}b-a\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}\cdot\frac{\omega-1}{\omega-\overline{\omega}}\text{ となり，}$$

$$|j-t|=\left|\frac{\overline{a}b-a\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}-(a+b+c)\right|\left|\frac{\omega-1}{\omega-\overline{\omega}}\right|$$

$$=R\left|\frac{\omega-1}{\omega-\overline{\omega}}\right|\text{（R は △ABC の外接円の半径）}$$

同様の計算により，$|k-t|$，$|l-t|$ も同じ値になるので T は △JKL の外心，つまり O′ である．（以下略）　▮

この程度うまくできているものは少なかったが，方針を大きく誤らない限り，時間をかければ必ず解ける方針である．

応募総数 27 通で，全員正解．

［解２］　白石直人（筑駒１），**岡村和樹（洛南３）**，有田裕三（塾講師），松村尚明（山口県周東町）

［**解２以外の幾何**］　恩田耕太郎（東邦大附東邦１），**山下博司（灘１）**，甲斐亘（ラ・サール２），**田中良樹（麻布２）**，井手上敏也（東大理Ⅰ），多田寛之（講師），小林保雄（鳥取県），塔間陽一（山口県宇部市）

［**計算**］　若島亨（浦和南卒），金沢篤（学生），萬山星一（関西学院大２），小林博省（教員），高村薫（教員），上野雄一朗（熊本市），太田吉雄（山形市），黒澤正信（東京都練馬区），斉藤吉信（大津市），徳田晃（鳥取市），林道宏（福岡県豊前市），仲村公孝（千葉県四街道市）

［**複数解答**］　浜田一志（塾経営），松本司（広島県福山市），清洲早紀（京都市左京区）　　（太字の方にバインダー贈呈）