志望学部	学部
受験番号	

平成25年度 数学② 解答紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（4枚のうちその1）

1 の解答欄

	点

$$S_n = 2a_n + n^2 \text{ ―― ①}$$

（問1） ①の n に $n+1$ を代入すると

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1)^2 \text{ ―― ②}$$

②−① より $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + (2n+1)$

$\therefore$ $\underline{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1 \ (n \geqq 1)}$ ―― ③ …（答）

（問2） ①に $n=1$ を代入すると

$S_1 = 2a_1 + 1$

$S_1 = a_1$ より $a_1 = -1$

③を変形して $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta)$ を満たす α, β を求めると．

$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n - \alpha + \beta$

③と係数を比較して

$\alpha = -2$, $-\alpha + \beta = -1$

$\therefore$ $\alpha = -2$, $\beta = -3$

よって ③を変形すると $a_{n+1} - 2(n+1) - 3 = 2(a_n - 2n - 3)$ となる。

数列 $\{a_n - 2n - 3\}$ は 初項 $a_1 - 2 - 3 = -6$，公比2の等比数列である。

$\therefore$ $a_n - 2n - 3 = -6 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore$ $\underline{a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n}$ …（答）

平成25年度　数学②解答紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（４枚のうちその２）

志望学部	学部
受験番号	

2 の解答欄

	点

（問1）　点Pを(x, y, z)とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = -x+y+z \\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} = 2x+y-2z \end{cases}$$

条件より　$-x+y+z \geqq 0 \cdots ①$

$2x+y-2z \geqq 0 \cdots ②$

$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} = (-k, k, k) + (2-2k, 1-k, 2k-2)$

$= (2-3k, 1, 3k-2)$

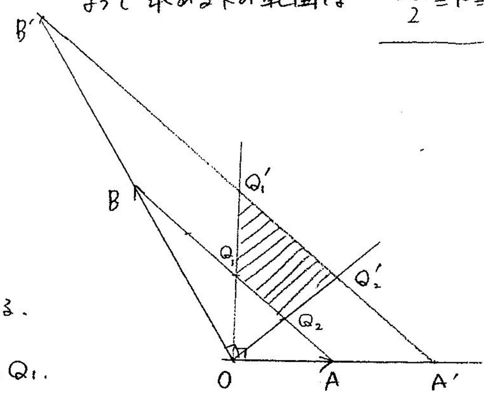
点Qが領域Dに含まれるのは、①, ②より

$3k-2+1+3k-2 \geqq 0$　かつ　$2(2-3k)+1-2(3k-2) \geqq 0$

すなわち　$\frac{1}{2} \leqq k$　かつ　$k \leqq \frac{3}{4}$　のとき

よって求めるkの範囲は　$\frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{3}{4}$ …(答)

（問2）



平面OAB上において

$\overrightarrow{OR} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定まる点Rは、

$1 \leqq s+t \leqq 2$ より

$2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ とおくと

直線ABと直線A'B'の間に存在する。

（問1）における $k=\frac{1}{2}$ のときの点QをQ₁,

$k=\frac{3}{4}$ のときの点QをQ₂とすると、

領域Dは、右図の点Oを端点とする半直線OQ_1, OQ_2の間となる。

求めるDとEの共通部分は、$2\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OQ_1'}$, $2\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OQ_2'}$ とおくと

四角形$Q_1Q_2Q_2'Q_1'$の内部および周上である。

この面積をSとすると　$\triangle OQ_1Q_2 \backsim \triangle OQ_1'Q_2'$, $OQ_1 : OQ_1' = 1:2$ より、$S = 3 \times \triangle OQ_1Q_2$

また　$\triangle OQ_1Q_2 = \frac{1}{4}\triangle OAB$ であるから　$(\triangle OAB\text{の面積}) = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3\times 9-(-3)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ より

$S = \frac{3}{4} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$ …(答)

志望学部	学部
受験番号	

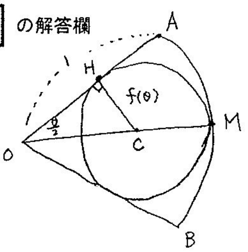
平成25年度 数学② 解答紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（4枚のうちその3）

3 の解答欄

	点

（問1）



図のように点をとると、

直角三角形 OCH で

$$f(\theta) = OC \sin\frac{\theta}{2}$$

また

$$OC + CM = OC + f(\theta) = 1$$

だから，OCを消去して

$$f(\theta) = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}} \quad \cdots（答）$$

（問2）（問1）より

$$f'(\theta) = \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right) - \sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$0<\theta<\pi$ より $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ だから $\cos\frac{\theta}{2}>0$

分母も正だから

$$f'(\theta)>0$$

よって $f(\theta)$ は単調に増加する。

次に

$$f''(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 - \cos\frac{\theta}{2}\left\{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\right\}'}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 - \cos\frac{\theta}{2}\left\{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\}}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\frac{\theta}{2}}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right) - \left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{2-\sin\frac{\theta}{2}}{\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} < 0 \qquad \left(\because\ 2-\sin\frac{\theta}{2}>0\right)$$

よって $f'(\theta)$ は単調に減少する。

（問3）

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$

$$= \left[\theta - 2\tan\frac{\theta}{2} + \frac{2}{\cos\frac{\theta}{2}}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) - 2\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} + 2\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right) \quad \cdots（答）$$

（注）$\frac{\theta}{2}=x$ とおいて計算すると，やりやすくなる。

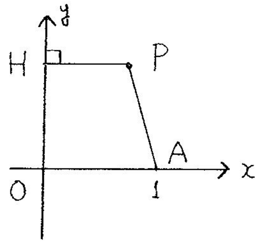
平成25年度 **数学② 解答紙**

志望学部	学部
受験番号	

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（4枚のうちその4）

4 の解答欄

	点

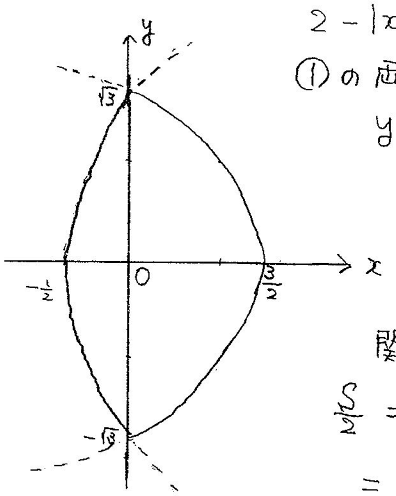


(1) 条件を満たす点を $P(x, y)$ とし、$A(1, 0)$ とする。また、点Pより y 軸に垂線PHを下ろす。

AP + PH = 2 より $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x|$ …①

$2-|x|\geqq 0$ より $-2\leqq x\leqq 2$



①の両辺を平方して $x^2-2x+1+y^2=4-4|x|+x^2$

$y^2=-4|x|+2x+3$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき $y^2=-2x+3$ …②

$-2\leqq x<0$ のとき $y^2=6x+3$ …③

求める面積を S とする。Cで囲まれた部分は x 軸に関して対称なので、②,③より

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{3-y^2}{2}-\frac{y^2-3}{6}\right)dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left(2-\frac{2}{3}y^2\right)dy=\left[2y-\frac{2}{9}y^3\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

よって $S=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ …(答)

(2) $x^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ …④

(i) $0\leqq x\leqq 2$ のとき ②,④より $x^2-2x+3=\dfrac{9}{4}$

整理して $(2x-1)(2x-3)=0$ よって $x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$

(ii) $-2\leqq x<0$ のとき ③,④より $x^2+6x+3=\dfrac{9}{4}$

整理して $4x^2+24x+3=0$ これより $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{33}}{2}$

$-2\leqq x<0$ より $x=\dfrac{-6+\sqrt{33}}{2}$

(i)(ii)より 交点の x 座標は $\dfrac{-6+\sqrt{33}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$ …(答)

交点は $x=\dfrac{-6+\sqrt{33}}{2}$ と $x=\dfrac{1}{2}$ のとき2個ずつ, $x=\dfrac{3}{2}$ のとき1個あるので

交点の個数は 5個 …(答)