平成25年度 **数学③解答紙**

医（医学科）（4枚のうちその1）

| 志望学部 | 学部 |
|---|---|
| 受験番号 | |

1 の解答欄

| | 点 |
|---|---|

(問1) 題意より $0<p<1,\ 0<q<1$

A君が勝つ確率 P(A) は

$$P(A)=p+(1-p)(1-q)p+\cdots+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p$$

$$=\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}p \quad \cdots(答)$$

(問2) B君が勝つ確率 P(B) は

$$P(B)=(1-p)q+(1-p)(1-q)(1-p)q+\cdots+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}(1-p)q$$

$$=\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}(1-p)q$$

よって

$$P(A)-P(B)=\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}\{p-(1-p)q\}$$

ここで，$0<1-p<1$，$0<1-q<1$ より

$(1-p)(1-q)<1$，かつ $(1-p)^n(1-q)^n<1$

より $\dfrac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}>0$

となることから，$P(A)>P(B)$ となるのは

$p-(1-p)q>0$ すなわち

$p>\dfrac{q}{1+q}$ を満たすとき ↗

$p+q\leqq 1$ に注意すると

(i) $q=\frac{1}{6}$ のとき $\frac{1}{7}<p\leqq\frac{5}{6}$ これを満たす $p$ は

$p=\frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6}$

(ii) $q=\frac{2}{6}$ のとき $\frac{1}{4}<p\leqq\frac{4}{6}$ これを満たす $p$ は

$p=\frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6}$

(iii) $q=\frac{3}{6}$ のとき $\frac{1}{3}<p\leqq\frac{3}{6}$ これを満たす $p$ は

$p=\frac{3}{6}$

(iv) $q=\frac{4}{6},\ \frac{5}{6}$ のとき，条件を満たす $p$ は存在しない。

以上 (i)〜(iv) より 条件を満たす集合の組 $(X, Y)$ は，

$${}_6C_1({}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5)+{}_6C_2({}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4)+{}_6C_3\times{}_3C_3$$

$$=6\times31+15\times11+20\times1$$

$=371$ 通り …(答)



[redacted]

平成25年度 数学③解答紙

医（医学科）（4枚のうちその2）

| 志望学部 | 学部 |
| --- | --- |
| 受験番号 | |

| | |
| --- | --- |
| | 点 |

2 の解答欄

(問1) $\vec{OQ} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB} = \vec{OB} + k\vec{BA}$

$\vec{OA}=(-1,1,1)$, $\vec{OB}=(2,1,-2)$, $\vec{BA}=(-3,0,3)$ より

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-3$, $\vec{OA}\cdot\vec{BA}=6$, $\vec{OB}\cdot\vec{BA}=-12$, $|\vec{OB}|^2=9$

$\vec{OA}\cdot\vec{OQ}=\vec{OA}\cdot(\vec{OB}+k\vec{BA}) = \vec{OA}\cdot\vec{OB}+k\vec{OA}\cdot\vec{BA}$

$=-3+6k$

$\vec{OA}\cdot\vec{OQ}\ge 0$ より $-3+6k\ge 0$ ∴ $k\ge\frac{1}{2}$

同様に，$\vec{OB}\cdot\vec{OQ}=|\vec{OB}|^2+k\vec{OB}\cdot\vec{BA}=9-12k$ で，

$\vec{OB}\cdot\vec{OQ}\ge 0$ より $k\le\frac{3}{4}$

よって，求める $k$ の範囲は

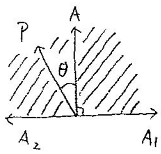
$\frac{1}{2}\le k\le\frac{3}{4}$ …(答)

(問2)

$\vec{OA}$ と $\vec{OP}$ のなす角を $\theta$ とすると，

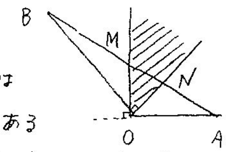
$\vec{OA}\cdot\vec{OP}\ge 0$ より $\cos\theta\ge 0$

∴ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$




したがって，平面OAB上で $\vec{OA}\cdot\vec{OP}\ge 0$ を満たす点Pの存在範囲は右上のようになる．ここに，$\vec{OA_1}\perp\vec{OA}$，$\vec{OA_2}\perp\vec{OA}$ で，境界を含む．

$\vec{OB}\cdot\vec{OP}\ge 0$ についても同様で，$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-3<0$ だから，$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ のなす角は鈍角である．Qは直線にあるので，(1)の結果より $\vec{OA}\cdot\vec{OP}\ge 0$，$\vec{OB}\cdot\vec{OP}\ge 0$ を満たす点Pの存在範囲は右図のようになる．

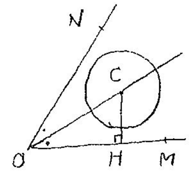



ここで，$\vec{OM}=\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{BA}$，$\vec{ON}=\vec{OB}+\frac{3}{4}\vec{BA}$ で，境界を含む．

$\vec{OM}$，$\vec{ON}$ の成分を求めると，

$\vec{OM}=\frac{1}{2}(1,2,-1)$，$\vec{ON}=\frac{1}{4}(-1,4,1)$

円Cの存在範囲を調べるには対称性から円の中心Cが∠MONの二等分線上にある場合を考えれば十分である．




$\vec{m}=(1,2,-1)$，$\vec{n}=(-1,4,1)$ とおくと，

$\vec{OC}$ は正の数 $t$ を用いて

$$\vec{OC}=\left(\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}+\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)t$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)+\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,4,1)\right)t=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1,2\sqrt{3}+4,-\sqrt{3}+1)t$$

と表すことができる．Cより直線OMに下ろした垂線の足をHとすると，$\vec{OH}$ は $\vec{OC}$ の直線OM上への正射影ベクトルであるので，$\vec{OH}=\frac{\vec{OC}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|^2}\vec{m}$．

$$\vec{OC}\cdot\vec{m}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\{\sqrt{3}-1+2(2\sqrt{3}+4)-(-\sqrt{3}-1)\}t=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)t$$

$$\therefore |\vec{OH}|=\frac{|\vec{OC}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|^2}|\vec{m}|=\frac{|\vec{OC}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)t$$

円Cが領域Dに含まれる条件は $CH\ge\sqrt{6}$ であるので

$$|\vec{OC}|^2-|\vec{OH}|^2\ge 6$$

$$\frac{1}{18}\{(\sqrt{3}+1)^2+(2\sqrt{3}+4)^2+(-\sqrt{3}+1)^2\}t^2-\frac{1}{3}(\sqrt{3}+1)^2t^2\ge 6$$

$$\left\{\frac{2}{3}(3+\sqrt{3})-\frac{1}{3}(4+2\sqrt{3})\right\}t^2\ge 6$$

$$\frac{2}{3}t^2\ge 6,\quad t^2\ge 9$$

$t>0$ より $t\ge 3$

$t$ が最小のとき $|\vec{OC}|$ も最小だから，$|\vec{OC}|$ は $t=3$ のとき最小である．このとき，Cの座標は

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\sqrt{6}+2\sqrt{2},\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\sqrt{6}+2\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$$

…(答)

平 成 25 年 度 数 学 ③ 解 答 紙

医（医学科）（4枚のうちその3）

| 志望学部 | 学 部 |
| --- | --- |
| 受験番号 | |

$\boxed{3}$ の解答欄

| | 点 |
| --- | --- |

② の $\boxed{3}$ 参照

平成25年度 **数学③解答紙**

医（医学科）（4枚のうちその4）

| 志望学部 | 学部 |
| --- | --- |
| 受験番号 | |

| | 点 |
| --- | --- |

4 の解答欄　(問1)は数学②の4参照

(問2) $C$：　$-\frac{1}{2}\leqq x<0$ のとき　$y^2=6x+3$

$0\leqq x\leqq\frac{3}{2}$ のとき　$y^2=-2x+3$

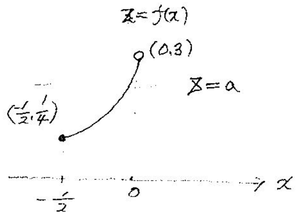
(i) $-\frac{1}{2}\leqq x<0$ のとき

$$\begin{cases} x^2+y^2=a & \text{——— ①} \\ y^2=6x+3 & \text{——— ②} \end{cases}$$

②を①へ代入　$x^2+6x+3=a$

$f(x)=x^2+6x+3$ とおくと

$=(x+3)^2-6$




②より $x=-\frac{1}{2}$ のとき　$y$は1個

$-\frac{1}{2}<x<0$ のとき　$y$は2個 対応する

よって
$$\begin{cases} 0<a<\frac{1}{4} \text{ のとき} & 0\text{個} \\ a=\frac{1}{4} \text{ のとき} & 1\text{個} \\ \frac{1}{4}<a<3 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ a\geqq 3 \text{ のとき} & 0\text{個} \end{cases}$$

(ii) $0\leqq x\leqq\frac{3}{2}$ のとき

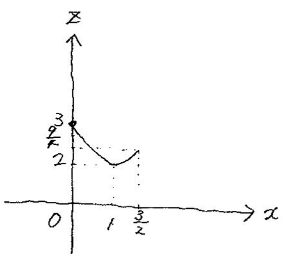
$$\begin{cases} x^2+y^2=a & \text{——— ①} \\ y^2=-2x+3 & \text{——— ③} \end{cases}$$

③を①へ代入

$x^2-2x+3=a$

$g(x)=x^2-2x+3$ とおく

$=(x-1)^2+2$




③より　$x=\frac{3}{2}$ のとき　$y$は1個

$0\leqq x<\frac{3}{2}$ のとき $y$は2個 対応する

$$\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき} & 0\text{個} \\ a=2 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ 2<a<\frac{9}{4} \text{ のとき} & 4\text{個} \\ a=\frac{9}{4} \text{ のとき} & 3\text{個} \\ \frac{9}{4}<a\leqq 3 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ a>3 \text{ のとき} & 0\text{個} \end{cases}$$

よって (i), (ii)より

| | |
| --- | --- |
| $0<a<\frac{1}{4}$ のとき | 0個 |
| $a=\frac{1}{4}$ のとき | 1個 |
| $\frac{1}{4}<a<2$ のとき | 2個 |
| $a=2$ のとき | 4個 |
| $2<a<\frac{9}{4}$ のとき | 6個 |
| $a=\frac{9}{4}$ のとき | 5個 |
| $\frac{9}{4}<a<3$ のとき | 4個 |
| $a=3$ のとき | 2個 |
| $a>3$ のとき | 0個 |

…(答)