志望学部	学部
受験番号	

平成26年度 数学② 解答紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（4枚のうちその1）

$\boxed{1}$ の解答欄

		点

数学① $\boxed{1}$ を参照，

志望学部	学部
受験番号	

平成26年度 数学② 解答紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（4枚のうちその2）

2 の解答欄

	点

与えられた方程式より

$a\sin\theta\cos\theta + \sin\theta - \cos\theta = 0$ ……①

$\sin\theta - \cos\theta = t$ ……② とおくと

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = t^2$

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(1-t^2)$ ……③

②,③を①に代入して

$\frac{a}{2}(1-t^2) + t = 0$

$-\frac{a}{2}t^2 + t + \frac{a}{2} = 0$

$a>0$ より　$t^2 - \frac{2}{a}t - 1 = 0$ ……④

また②より　$t = \sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ なので

$0<\theta<\pi$ のとき　$-1 < t \leqq \sqrt{2}$ ……⑤

(問1)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき　$-1<t<1$ であり

この範囲において θ と t は1対1に対応している。

$f(t) = t^2 - \frac{2}{a}t - 1$ とおくと

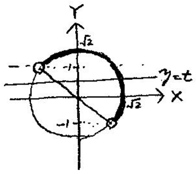
$f(-1) = \frac{2}{a} > 0$，$f(1) = -\frac{2}{a} < 0$

$f(t)$ は2次関数であるから $-1<t<1$ の範囲に $y=f(t)$ と t 軸との共有点がただ1つ存在する。

したがって θ の方程式①は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲でただ1つの実数解をもつ。

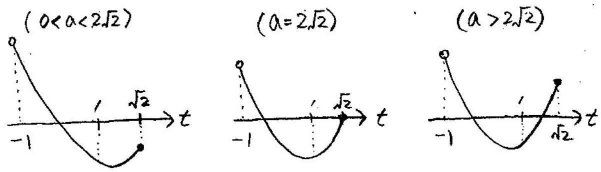
(問2)　$-1<t\leqq 1$，$t=\sqrt{2}$ の範囲の t 1つに対し，θ は1つ，

$1<t<\sqrt{2}$ の範囲の t 1つに対し，θ は2つ存在する。



$f(\sqrt{2}) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{a} = \frac{a-2\sqrt{2}}{a}$ より

$y=f(t)$ と t 軸の位置関係は以下のとおり



$0<a<2\sqrt{2}$ のとき　$-1<t<1$ の範囲に t が1つ存在する。

$a=2\sqrt{2}$ のとき　$-1<t<1$ の範囲に t が1つと $t=\sqrt{2}$ が1つ，計2つ存在する

$a>2\sqrt{2}$ のとき　$-1<t<1$ の範囲に t が1つ
$1<t<\sqrt{2}$ の範囲に t が1つ
あわせて2つの t が存在する

したがって，条件を満たす θ の個数は

$0<a<2\sqrt{2}$ のとき　1コ

$a=2\sqrt{2}$ のとき　2コ

$a>2\sqrt{2}$ のとき　3コ

平成26年度 **数学② 解答紙**

志望学部	学部
受験番号	

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（4枚のうちその3）

3 の解答欄

	点

$a_1=1,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n+r^2}{a_n+1}$ ---①

(問1)

数学的帰納法により示す。

$a_1=1,\ r>1$ だから $\quad a_1<r$

①より $a_2=\dfrac{a_1+r^2}{a_1+1}=\dfrac{r^2+1}{2}$

ここで $\dfrac{r^2+1}{2}-r=\dfrac{(r-1)^2}{2}>0\ (\because r\neq 1)$

よって $a_2>r$

kを自然数とするとき、

$a_{2k-1}<r$ と仮定すると

①より

$$a_{2k}=\frac{a_{2k-1}+r^2}{a_{2k-1}+1}=\frac{a_{2k-1}+1+r^2-1}{a_{2k-1}+1}$$

$$=1+\frac{r^2-1}{a_{2k-1}+1}>1+\frac{r^2-1}{r+1}=r$$

よって $a_{2k}>r$

また $a_{2k}>r$ のとき

$$a_{2k+1}=\frac{a_{2k}+r^2}{a_{2k}+1}=1+\frac{r^2-1}{a_{2k}+1}$$

$$<1+\frac{r^2-1}{r+1}=r$$

よって $a_{2k+1}<r$

以上よりすべての自然数nに対し、

nが奇数のとき $a_n<r$、nが偶数のとき $a_n>r$

(問2)

$$a_{n+2}-r=\frac{a_{n+1}+r^2}{a_{n+1}+1}-r=1+\frac{r^2-1}{a_{n+1}+1}-r$$

$$=1-r+\frac{r^2-1}{\frac{a_n+r^2}{a_n+1}+1}$$

$$=1-r+\frac{(r^2-1)(a_n+1)}{2a_n+r^2+1}$$

$$=\frac{(1-r)(2a_n+r^2+1)-(1-r^2)(a_n+1)}{2a_n+r^2+1}$$

$$=\frac{(r-1)^2(a_n-r)}{2a_n+r^2+1}$$ ---(答)

(問3) (問2)より $\quad a_{2n+2}-r=\dfrac{(r-1)^2(a_{2n}-r)}{2a_{2n}+r^2+1}$

$a_{2n}>r$ であるから

$$\frac{(r-1)^2(a_{2n}-r)}{2a_{2n}+r^2+1}<\frac{(r-1)^2(a_{2n}-r)}{2r+r^2+1}=\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2(a_{2n}-r)$$

よって $\quad a_{2n+2}-r<\left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^2(a_{2n}-r)$ ---②

$a_{2n}-r>0$ なので、

$$\frac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(問4) ②より

$$a_{2n}-r<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2(a_{2n-2}-r)<\cdots\cdots$$

$$<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{2(n-1)}(a_2-r)$$

$r>1$ であるから $0<\dfrac{r-1}{r+1}<1$ よって

$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^{2(n-1)}\to 0$

また $0<a_{2n}-r$ であるから

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=r$$ ---(答)

また①より

$a_{2n+1}=\dfrac{a_{2n}+r^2}{a_{2n}+1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{r+r^2}{r+1}=r$$ ---(答)

志望学部	学 部
受験番号	

平成26年度 数学②解答紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻）・薬・工（4枚のうちその4）

4 の解答欄

	点

(問1) $f(x)=e^{ax}$ とする。

$f'(x)=ae^{ax}$ より，点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

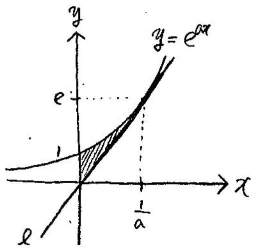
$$y=ae^{at}(x-t)+e^{at}$$
$$=ae^{at}x+(1-at)e^{at}$$

これが原点を通るとき $t=\frac{1}{a}$.

よって直線 ℓ の方程式は

$$y=aex$$

であり，接点の座標は $\left(\frac{1}{a}, e\right)$ である。



$$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{ax})^2dx-\pi\int_0^{\frac{1}{a}}(aex)^2dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2a}e^{2ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}-\pi a^2e^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{a}}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{2a}e^2-\frac{1}{2a}\right)-\pi a^2e^2\cdot\frac{1}{3a^3}$$
$$=\frac{\pi(e^2-3)}{6a} \quad \cdots\cdots(答)$$

(問2) $y=e^{ax}$ より $x=\frac{1}{a}\log y$

$y=aex$ より $x=\frac{1}{ae}y$

$$V_2=\pi\int_0^e\left(\frac{1}{ae}y\right)^2dy-\pi\int_1^e\left(\frac{1}{a}\log y\right)^2dy$$
$$=\frac{\pi}{a^2e^2}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^e-\frac{\pi}{a^2}\left[y(\log y)^2-2y\log y+2y\right]_1^e$$
$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi}{a^2}(e-2)$$
$$=\frac{2\pi(3-e)}{3a^2} \quad \cdots(答)$$

(問3) $V_1=V_2$ より

$$\frac{\pi(e^2-3)}{6a}=\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$$
$$a(e^2-3)=4(3-e)$$
$$\therefore a=\frac{4(3-e)}{e^2-3} \quad \cdots(答)$$