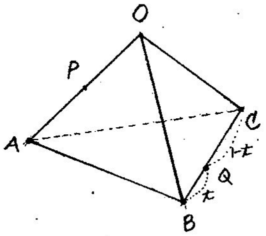
平成26年度 **数学③解答紙**

医（医学科）（4枚のうちその1）

志望学部	学部
受験番号	

1 の解答欄

	点



(問1) PM+MQが最小となる点Mは図1の展開図において、P_1QとOBの交点のときである。

PN+NQが最小となる点Nも同様に考えてP_2QとOCの交点のときである。

図1において $A_1A_2 /\!/ BC$ なので

$\triangle OMP_1 \backsim \triangle BMQ$ …①

$\triangle ONP_2 \backsim \triangle CNQ$ …②

①より $\dfrac{BM}{OM}=\dfrac{BQ}{OP_1}=\dfrac{t}{\frac{1}{2}}$ ∴ $OM:MB=1:2t$ よって $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2t+1}\vec{b}$ …(答)

②より $\dfrac{CN}{ON}=\dfrac{CQ}{OP_2}=\dfrac{1-t}{\frac{1}{2}}$ ∴ $ON:NC=1:(2-2t)$ よって $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$ …(答)

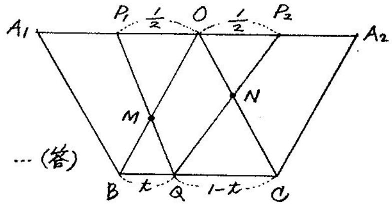


図1

(問2) $\triangle OBC$の面積をSとすると $S=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$OB:OM=(2t+1):1$, $OC:ON=(3-2t):1$ より $\triangle OMN=\dfrac{1}{2t+1}\cdot\dfrac{1}{3-2t}S$

同様にして $\triangle MBQ=\dfrac{2t}{2t+1}\cdot tS$, $\triangle NCQ=\dfrac{2-2t}{3-2t}\cdot(1-t)S$

よって $\triangle QMN=\triangle OBC-(\triangle OMN+\triangle MBQ+\triangle NCQ)$

$$=S-\left\{\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}S+\frac{2t^2}{2t+1}S+\frac{2(1-t)^2}{3-2t}S\right\}$$

$$=\frac{-4t^2+4t}{(2t+1)(3-2t)}S$$

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}$ より $\triangle QMN=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$ …(答)

(問3) (問2)より $\triangle QMN=\dfrac{\sqrt{3}(t-t^2)}{3+4(t-t^2)}$

$t-t^2=x$ とおくと $x=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

$0<t<1$ より $0<x\leqq\frac{1}{4}$ …③

$\triangle QMN=\dfrac{\sqrt{3}x}{4x+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\dfrac{\frac{3}{4}}{x+\frac{3}{4}}\right)$

③より $x=\frac{1}{4}$のとき $\triangle QMN$は最大となり 最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ …(答)

[redacted]

志望学部	学部
受験番号	

平成26年度 **数学③解答紙**

医（医学科）（4枚のうちその2）

2 の解答欄

	点

$\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta \quad (0<\theta<\pi) \quad \cdots (*)$

（問1） $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta\cos\theta \neq 0$ だから $(*)$ は

$$\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = a \quad \cdots ①$$

と同値．

$f(\theta) = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ とおくと，$f(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$

$f'(\theta) = -\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \left(\dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) = -\dfrac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} < 0 \quad (\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0)$

よって，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において $f(\theta)$ は単調減少で，

$$\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = -\infty$$

ゆえに，① は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つの解をもつ．

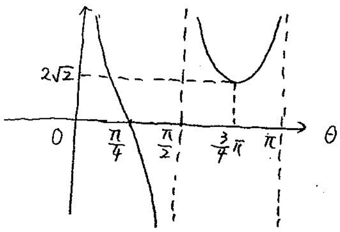
（問2） $(*)$ において，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，左辺 $=-1$，右辺 $=0$．よって，$\theta=\frac{\pi}{2}$ は $(*)$ を満たさない．

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，上の計算より

$$f'(\theta) = -\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = -\frac{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})(1-\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

θ	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π
$f'(\theta)$	／	$-$	0	$+$	／
$f(\theta)$	／	↘	$2\sqrt{2}$	↗	／

$f(\frac{3}{4}\pi) = 2\sqrt{2}$



$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0} f(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta\to\pi-0} f(\theta) = \infty$$

以上と(問1)の場合を合わせると，グラフは右のようになる．

$(f(\frac{\pi}{4}) = 0)$

よって，
$$\begin{cases} 0<a<2\sqrt{2} \text{ のとき } 1\text{個} \\ a=2\sqrt{2} \text{ のとき } 2\text{個} \\ a>2\sqrt{2} \text{ のとき } 3\text{個} \end{cases} \quad \cdots(答)$$

平成26年度 **数学③解答紙**

医（医学科）（4枚のうちその3）

志望学部	学部
受験番号	

3 の解答欄

	点

(問1) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

x	0		e	
$f'(x)$		$+$		$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

増減表より $x>0$ のとき $f(x)\leqq f(e)=\dfrac{1}{e}$ であるので、

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{3}{e}\quad (A)$$

$e>2.7$ より $\dfrac{3}{e}<\dfrac{3}{2.7}=1.1\cdots$ (B)

一方，$\log 2>0.6$ より $\log 4=2\log 2>2\times 0.6=1.2$ (C)

(A), (B), (C) より $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(問2) a, b, c, d は正の数であるので，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$ …① は対数をとった

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d$$

と同値である．さらに，$abc>0$ なので この式は

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d\quad\cdots②$$

と同値である．(問1) の不等式と，$d\geqq 4$ のとき $\log d\geqq\log 4$ であることから

② を満たす自然数 d は $d\leqq 3$ でなければならない．$d\geqq 3$ とあわせる

と $d=3$ である。よって，② は

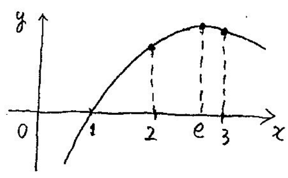
$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad\cdots③$$

ここで，$\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{1}{6}(2\log 3-3\log 2)=\dfrac{1}{6}(\log 9-\log 8)>0$ より $\dfrac{\log 3}{3}>\dfrac{\log 2}{2}>0$

また，(問1) の増減表より $x\geqq 3$ のとき $\dfrac{\log x}{x}\leqq\dfrac{\log 3}{3}$．さらに，$\dfrac{\log 1}{1}=0$．

したがって，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{3\log 3}{3}=\log 3$$



等号成立条件は $a=b=c=3$

よって，③ を満たす自然数 a, b, c は $a=b=c=3$．

以上より $\underline{a=b=c=d=3}$ …(答)

平成26年度　**数学③解答紙**

医（医学科）（4枚のうちその4）

志望学部	学部
受験番号	

4 の解答欄

点

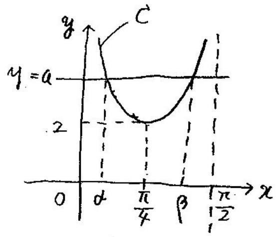
（問1）
$$y' = \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\sin x \cos x)^2} = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x \cos x)^2}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

$y'=0$ より　$\sin x = \cos x$　$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$　$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\ より\right)$

$\lim_{x \to +0} y = \infty$，$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} y = \infty$．$x = \frac{\pi}{4}$ のとき　$y = 2$

曲線 C のグラフは右のようになる．



$y = \frac{1}{\tan x \cos^2 x} = \frac{1}{\tan x}(1 + \tan^2 x)$ …① であるので，

$y = a$ より　$\frac{1}{\tan x}(1 + \tan^2 x) = a$

$\tan^2 x - a \tan x + 1 = 0$ …②　$\therefore\ \tan x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

$a > 2$ より　$\sqrt{a^2 - 4} > 0$　なので　$\frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2} < \frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}$

$\therefore\ \underline{\tan \alpha = \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2},\ \tan \beta = \frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}}$ …（答）

（問2）グラフと①より

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\tan x}(1 + \tan^2 x)\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{(\tan x)'}{\tan x}\,dx = \Big[\log|\tan x|\Big]_\alpha^\beta = \log\left|\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right|$$

$$= \log\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{a - \sqrt{a^2-4}} = \underline{2\log\frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}}\ \cdots（答）$$

（問3）$V = \pi \int_\alpha^\beta \left(\frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}\right)^2 dx$

$\tan x = t$ とおくと，$(1 + \tan^2 x)\,dx = dt$，

x	$\alpha \to \beta$
t	$\tan\alpha \to \tan\beta$

$$V = \pi \int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} \frac{1 + t^2}{t^2}\,dt = \pi \int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} \left(\frac{1}{t^2} + 1\right) dt = \pi\left[-\frac{1}{t} + t\right]_{\tan\alpha}^{\tan\beta}$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\alpha} + \tan\beta - \tan\alpha\right) = \pi(\tan\beta - \tan\alpha)\left(1 + \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}\right)$$

$= \underline{2\pi\sqrt{a^2 - 4}}$ …（答）　（∵ ② より　$\tan\alpha\tan\beta = 1$）