志望学部	学部
受験番号	

平成27年度　数学③解答紙

医（医学科）（4枚のうちその1）

1 の解答欄

	点

(問 1)　a, b, c が三角形の3辺となる条件は

$$a+b>c \cdots ①,\quad b+c>a \cdots ②\quad c+a>b \cdots ③$$

問題の条件より

$$a+b+c=1 \cdots ④,\quad 9ab=1 \cdots ⑤$$

④より $b+c=1-a$．これを②に代入して

$$1-a>a \qquad \therefore\ a<\frac{1}{2} \cdots ⑥$$

同様に④と③より $b<\frac{1}{2}$ …⑦

⑤より $b=\frac{1}{9a}$ だから，⑦より $\frac{1}{9a}<\frac{1}{2}$

$a>0$ なのでこの式より $a>\frac{2}{9}$ …⑧

⑥より $\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}$ で，このとき，上の計算より②,③は成立する.

さらに，$a>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係から

$$a+b=a+\frac{1}{9a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{9a}}=\frac{2}{3}\quad (\because ⑤$$

したがって，④より $c=1-(a+b)\leqq 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ a+b>c\quad (①が成立)$$

以上より，求める a の範囲は $\underline{\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}}$ …(答)

(問 2)　$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2ab}=\dfrac{2(a+b)-1-2ab}{2ab}$

$$=\frac{a+b}{ab}-\frac{1}{2ab}-1=9(a+b)-\frac{11}{2}$$

$$=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}\quad (\because ⑤)$$

ここで，$f(a)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$ とおくと

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{(3a+1)(3a-1)}{a^2}$$

$$f\left(\frac{2}{9}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1,\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

a	$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

増減表より $\underline{\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1}$ …(答)

[redacted]

志望学部	学部
受験番号	

平成27年度　数学③解答紙

医（医学科）（４枚のうちその２）

$\boxed{2}$ の解答欄

	点

②の $\boxed{2}$ に同じ

志望学部	学部
受験番号	

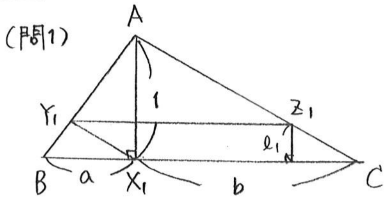
平成27年度 数学③解答紙

医（医学科）（4枚のうちその3）

	点

$\boxed{3}$ の解答欄

（問1）

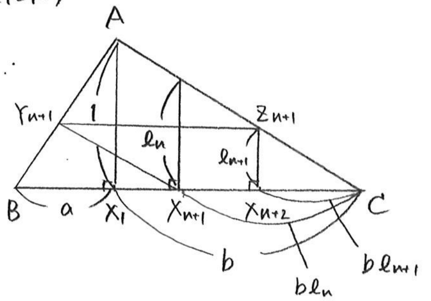


$AY_1 : Y_1B = AZ_1 : Z_1C = b : a$ だから

$AX_1 : l_1 = (a+b) : a$

$$\therefore\ l_1 = \frac{a}{a+b} \quad \cdots (答)$$

（問2）



$AY_{n+1} : Y_{n+1}B = AZ_{n+1} : Z_{n+1}C$ より

$bl_n : \{(a+b) - bl_n\} = (b - bl_{n+1}) : bl_{n+1}$

よって $bl_nl_{n+1} = (l_{n+1} - 1)\{bl_n - (a+b)\}$

$\therefore\ (a+b)l_{n+1} = -bl_n + a + b$

$$\therefore\ l_{n+1} = -\frac{b}{a+b}l_n + 1 \quad \cdots (答) \quad ①$$

「②」の解答のように、座標で考える方法もある.

（問3）

$b = 8a$ より ①は $l_{n+1} = -\frac{8}{9}l_n + 1$

以下「②」の $\boxed{3}$ の（問3）と同様.

別の考え方として

$\left(-\frac{8}{9}\right)^n > -\frac{1}{16}$ の両辺に

nを奇数として $(-1)^n$ をかけると

$\left(\frac{8}{9}\right)^n < \frac{1}{16}$ と表せる.

平成27年度　数学③解答紙

医（医学科）（4枚のうちその4）

志望学部	学部
受験番号	

4 の解答欄

	点

(問1)

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

ここで $t=x-n\pi$ とおくと $dt=dx$

x	$n\pi\to(n+1)\pi$
t	$0\to\pi$

となるから

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\pi}e^{-r(t+n\pi)}|\sin(t+n\pi)|\,dt$$

$$=e^{-nr\pi}\int_0^{\pi}e^{-rt}|\sin t|\,dt$$

$$=e^{-nr\pi}\int_0^{\pi}e^{-rt}\sin t\,dt\quad(\because 0\leqq t\leqq\pi\text{ で }\sin t\geqq 0)$$

$$=e^{-nr\pi}a_1\quad\cdots\text{①}$$

ここで

$$\int e^{-rt}\sin t\,dt=-\frac{1}{r}e^{-rt}\sin t+\frac{1}{r}\int e^{-rt}\cos t\,dt$$

$$\therefore\ r\int e^{-rt}\sin t\,dt-\int e^{-rt}\cos t\,dt=-e^{-rt}\sin t\quad\cdots\text{②}$$

また

$$\int e^{-rt}\cos t\,dt=-\frac{1}{r}e^{-rt}\cos t-\frac{1}{r}\int e^{-rt}\sin t\,dt$$

$$\therefore\ \int e^{-rt}\sin t+r\int e^{-rt}\cos t\,dt=-e^{-rt}\cos t\quad\cdots\text{③}$$

②×r + ③ より

$$(r^2+1)\int e^{-rt}\sin t\,dt=-e^{-rt}(r\sin t+\cos t)$$

よって $r^2+1\neq 0$ より

$$\int e^{-rt}\sin t\,dt=-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(t\sin t+\cos t)+C$$

(Cは定数)

したがって ①より

$$a_{n+1}-a_n=e^{-nr\pi}\left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(t\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}\quad\cdots\text{(答)}$$

(問2) $n\geqq 2$ のとき ① と (1) の結果より

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=a_1+a_1\sum_{k=1}^{n-1}(e^{-r\pi})^k$$

$$=a_1\left\{1+\frac{e^{-r\pi}(1-e^{-r(n-1)\pi})}{1-e^{-r\pi}}\right\}$$

$$=a_1\cdot\frac{1-e^{-nr\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$

$$=\frac{1}{r^2+1}\cdot\frac{1+e^{-r\pi}}{1-e^{-r\pi}}(1-e^{-nr\pi})\quad\cdots\text{(答)}$$

(これは $n=1$ のときも成立する)

(問3) (問2)より $r>0$ より $|e^{-r\pi}|<1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{r^2+1}\cdot\frac{1+e^{-r\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$

$$=\frac{1}{r^2+1}\cdot\frac{e^{r\pi}+1}{e^{r\pi}-1}\quad\cdots\text{(答)}$$

(問4)

$$rf(r)=\frac{r}{r^2+1}\cdot\frac{e^{r\pi}+1}{e^{r\pi}-1}=\frac{1}{\pi(r^2+1)}\cdot\frac{e^{r\pi}+1}{\frac{e^{r\pi}-1}{r\pi}}$$

となるから

$$\lim_{r\to+0}\frac{e^{r\pi}-1}{r\pi}=1$$

より

$$\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1}{\pi\cdot 1}\cdot\frac{1+1}{1}=\frac{2}{\pi}\quad\cdots\text{(答)}$$