

志望学部	学部
受験番号	

1 の解答欄

(問1) $x = \sin\theta + \cos\theta$ とし

$$x^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad \therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{x^2-1}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= (\sin\theta + a)(\cos\theta + a) \\ &= \sin\theta\cos\theta + a(\sin\theta + \cos\theta) + a^2 \\ &= \frac{x^2-1}{2} + ax + a^2 \\ &= \frac{x^2}{2} + ax + a^2 - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \dots (\text{答})$$

(問2) $x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leq \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 1$

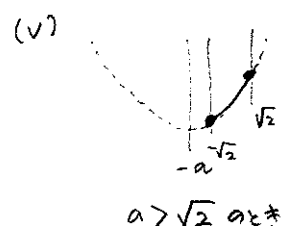
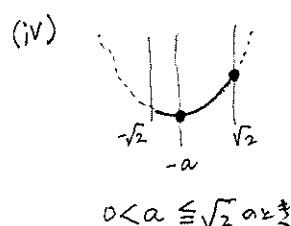
$$\therefore -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \quad \dots (\text{答})$$

(問3) $y = \frac{x^2}{2} + ax + a^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+a)^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$

(i) 最大値は $a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$ ($x = -\sqrt{2}$)
最小値は $a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$ ($x = \sqrt{2}$)
 $a < -\sqrt{2}$ のとき

(ii) 最大値は $a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$ ($x = -\sqrt{2}$)
最小値は $\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$ ($x = -a$)
 $-\sqrt{2} \leq a < 0$ のとき

(iii) 最大値は $\frac{1}{2}$ ($x = \pm\sqrt{2}$)
最小値は $-\frac{1}{2}$ ($x = 0$)
 $a = 0$ のとき



(i) ~ (v) の最大値 $\begin{cases} a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} & (a < 0) \\ \frac{1}{2} & (a = 0) \\ a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2} & (a > 0) \end{cases}$

最小値 $\begin{cases} a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{2} & (a < -\sqrt{2}) \\ \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} & (-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}) \\ a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} & (a > \sqrt{2}) \end{cases} \quad \dots (\text{答})$

志望学部	学部
受験番号	

2 の解答欄

(問1) $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab+bc+ca$$

$$f(a) = g(a) - g'(a)$$

$$= -\{3a^2 - 2(a+b+c)a + ab+bc+ca\}$$

$$= -a^2 + ab + ca - bc$$

$$= (a-c)b - a(a-c)$$

$$= (a-c)(b-a)$$

$$a < b < c \text{ より } f(a) < 0$$

$$f(b) = g(b) - g'(b)$$

$$= -\{3b^2 - 2(a+b+c)b + ab+bc+ca\}$$

$$= -b^2 + ab + bc - ca$$

$$= (b-a)c - b(b-a)$$

$$= (b-a)(c-b)$$

$$a < b < c \text{ より } f(b) > 0$$

$$f(c) = g(c) - g'(c)$$

$$= -\{3c^2 - 2(a+b+c)c + ab+bc+ca\}$$

$$= -c^2 + ca + bc - ab$$

$$= (c-b)a - c(c-b)$$

$$= (c-b)(a-c)$$

$$a < b < c \text{ より } f(c) < 0$$

(問2) $f(x) = (x+1)(x^2-4x+2)$

$$= x^3 - 3x^2 - 2x + 2 \dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = g(x) - g'(x) = x^3 - (a+b+c+3)x^2$$

$$+ \{(ab+bc+ca) + 2(a+b+c)\}x$$

$$- (abc + ab + bc + ca) \dots \textcircled{2}$$

①と②の係数を比較して

点

$$a+b+c+3=3, ab+bc+ca+2(a+b+c)=-2$$

$$abc+ab+bc+ca=-2$$

$$\therefore \text{これを解いて } a+b+c=0,$$

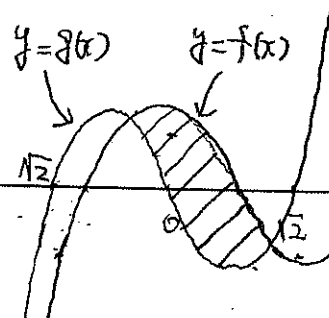
$$ab+bc+ca=-2, abc=0$$

$$\therefore \text{したがって } a, b, c \text{ は 3次方程式}$$

$$t^3 - 2t = 0 \text{ の解である。}$$

$$a < b < c \text{ より } a = -\sqrt{2}, b = 0, c = \sqrt{2} \dots \textcircled{\text{答}}$$

(問3)



$$g(x) = (x+\sqrt{2})x(x-\sqrt{2})$$

$$= x^3 - 2x$$

$$f(x) = x^3 - 2x - (3x^2 - 2)$$

$$= x^3 - 3x^2 - 2x + 2$$

$$f(x) = g(x) \text{ より}$$

$$f(x) - g(x) = -3x^2 + 2$$

$$f(x) - g(x) = 0 \text{ の解は } x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

求める面積をSとすると

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} (-3x^2 + 2) dx$$

$$= -3 \int_{-\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \left(x + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) dx$$

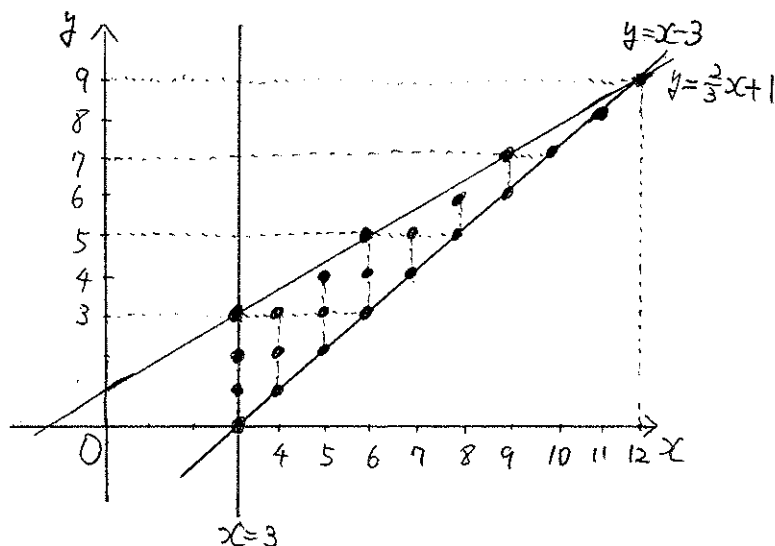
$$= 3 \times \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^3$$

$$= \frac{8\sqrt{6}}{9} \dots \textcircled{\text{答}}$$

志望学部	学部
受験番号	

3 の解答欄

(問1) D_3 を図示すると以下のようになる。



よって, $L_3 = 22$... (答)

(問2) $y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}$ と $y = x - n$ の交点の x 座標は $4n/3$ であり,

l と D_n が交わるとき, k のとりうる値は $0 \leq k \leq n$

のとき, l と $y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}$, $y = x - n$ の交点の y 座標は

$$y = \frac{2}{3}(n+3k) + \frac{n}{3} = n+2k$$

$$y = (n+3k) - n = 3k$$

であるから, l 上にある格子点の個数は

$$n+2k-3k+1 = n-k+1 \quad (0 \leq k \leq n) \dots (\text{答})$$

(問3) 同様に, 直線 $l_1: x = n+3k+1$ ($0 \leq k \leq n-1$) 上の格子点を考える。

l_1 と $y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}$, $y = x - n$ の交点の y 座標は

$$y = \frac{2}{3}(n+3k+1) + \frac{n}{3} = n+2k + \frac{2}{3}$$

$$y = (n+3k+1) - n = 3k+1$$

であるから, l_1 上にある格子点の個数は

$$n+2k-(3k+1)+1 = n-k \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

さらに, 直線 $l_2: x = n+3k+2$ ($0 \leq k \leq n-1$) 上の格子点を考える。

l_2 と $y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}$, $y = x - n$ の交点の y 座標は

$$y = \frac{2}{3}(n+3k+2) + \frac{n}{3} = n+2k + \frac{4}{3} = n+2k+1 + \frac{1}{3}$$

$$y = (n+3k+2) - n = 3k+2$$

であるから, l_2 上にある格子点の個数は

$$n+2k+1-(3k+2)+1 = n-k \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

以上より,

$$L_n = \sum_{k=0}^n (n-k+1) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)$$

$$= 3 \sum_{k=0}^n (n-k) + \sum_{k=0}^n 1$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k + (n+1)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(3n+2) \dots (\text{答})$$

志望学部	学部
受験番号	

4 の解答欄

$$(問1) \vec{OP} = \vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$$

$$= t\vec{OB} + (1-t)\vec{OC} - (1-s)\vec{OA}$$

$$= (s+t-2, -s+t+1, s+(1-k)t+k-1)$$

$$\text{よって, } P(s+t-2, -s+t+1, s+(1-k)t+k-1)$$

…(答)

$$(問2) \vec{OP} = t\vec{OB} + (1-t)\vec{OC} - (1-s)\vec{OA}$$

$$= \vec{OC} - \vec{OA} + t\vec{CB} + s\vec{OA}$$

$$= (-2, 1, k-1) + t(1, 1, 1-k) + s(1, -1, 1)$$

$$\text{ここで } \vec{l} = (1, 1, 1-k), \vec{m} = (1, -1, 1)$$

とすると

$$\vec{OP} = (-2, 1, k-1) + t\vec{l} + s\vec{m}$$

$$0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \text{ であるから}$$

平行四辺形 $P(k)$ の面積 $S(k)$ は,

$$S(k) = 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{l}|^2 |\vec{m}|^2 - (\vec{l} \cdot \vec{m})^2}$$

$$= \sqrt{\{1+1+(1-k)^2\} \times 3 - (1-1+1-k)^2}$$

$$= \sqrt{2k^2 - 4k + 8}$$

$$= \sqrt{2(k-1)^2 + 6}$$

$$S(k) \text{ の最小値は } \sqrt{6}, \text{ そのとき } k=1$$

…(答)

(問3)

 $k=1$ のとき

$$\vec{OP} = (s+t-2, -s+t+1, s)$$

Oから $P(k)$ を含む平面へ下ろした
垂線の足を H とすると,

$$\vec{OH} = (s+t-2, -s+t+1, s) \text{ と表せ}$$

$$\begin{cases} \vec{OH} \cdot \vec{l} = \vec{OH} \cdot (1, 1, 0) = 0 \\ \vec{OH} \cdot \vec{m} = \vec{OH} \cdot (1, -1, 1) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{cases} (s+t-2) + (-s+t+1) + 0 = 0 \\ (s+t-2) - (-s+t+1) + s = 0 \end{cases}$$

$$\text{解いて, } s=1, t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{OH} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$|\vec{OH}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

四角錐の体積は,

$$\frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = 1 \quad \dots (\text{答})$$

	点
--	---