

令和2年度

数学②解答紙

理・医(保健学科放射線技術科学専攻, 検査技術科学専攻)・薬・工(4枚のうち, その1)

志望学部	学部
受験番号	

1 の解答欄

	点
--	---

(問1) x は自然数 n を用いて $5n, 5n-1, 5n-2, 5n-3, 5n-4$ のいずれかで表せる.

(i) $x=5n$ のとき $x^2=25n^2=5 \cdot 5n^2$ より 余り 0

(ii) $x=5n-1$ のとき $x^2=(5n-1)^2=5(5n^2-2n)+1$ より 余り 1

(iii) $x=5n-2$ のとき $x^2=(5n-2)^2=5(5n^2-4n)+4$ より 余り 4

(iv) $x=5n-3$ のとき $x^2=(5n-3)^2=5(5n^2-6n+1)+4$ より 余り 4

(v) $x=5n-4$ のとき $x^2=(5n-4)^2=5(5n^2-8n+3)+1$ より 余り 1

よって x^2 を 5 で割った余りは
0, 1, 4 のいずれかである.

(問2) $x^2+5y=2z^2$ より $5y=2z^2-x^2$ ① $5y$ は常に 5 の倍数である.

(i) $z=5n-1$ または $z=5n-4$ のとき. (問1) より z^2 は 5 で割ると余りが 1 である. $2z^2$ は 5 で割ると余りが 2 となる.

(問1) より x^2 は 5 で割ると余りは 0, 1, 4 のいずれかであるので, ① の等号は成立しない.

(ii) $z=5n-2$ または $z=5n-3$ のとき. (問1) より z^2 は 5 で割ると余りが 4 である. $2z^2$ は 5 で割ると余りが 3 となる.

(問1) より x^2 は 5 で割ると余りは 0, 1, 4 のいずれかであるので, ① の等号は成立しない.

(iii) $z=5n$ のときは. (問1) より z^2 は 5 で割ると余りが 0 である. $2z^2$ も 5 で割ると余りは 0 である.

よって, ① の等号が成立するのは x^2 を 5 で割ったときの余りが 0 のとき. すなわち (問1) より x が 5 の倍数のとき.

このとき $z=5n, x=5k$ (n, k は自然数) とおくと.

$$2z^2-x^2=2(5n)^2-(5k)^2=50n^2-25k^2=5(10n^2-5k^2) \text{ より } y=10n^2-5k^2=5(2n^2-k^2) \text{ である.}$$

以上より, ① をみたす自然数 x, y, z が存在するのは, x, y, z がすべて 5 の倍数のときである.

(問3) $x^2+5y=2z^2$ をみたす自然数 x, y, z が存在すると仮定する.

$5y=2z^2-x^2$ ② とおくと, $5y$ は 5 の倍数なので. (問2) より, ② が成立するのは, x, z がともに 5 の倍数のとき.

よって $x=5p, z=5q$ (p, q は, $0 < p \leq x, 0 < q \leq z$ をみたす自然数) とおくと.

$$(左辺)=2(5p)^2-(5q)^2=50p^2-25q^2=25(2p^2-q^2)$$

また $y=5r$ (r は $0 < r \leq y$ をみたす自然数) とおくと, (右辺) $=5(5r)=125r$ より

$$125r=25(2p^2-q^2) \text{ より } 5r=2p^2-q^2 \text{ となる.}$$

これをみたす p, q, r は 1 同様に 5 の倍数となるが, これを繰り返すと,

ある自然数 x, y, z より小さい自然数が有限であることに矛盾する.

よって ② をみたす自然数 x, y, z は 存在しない.

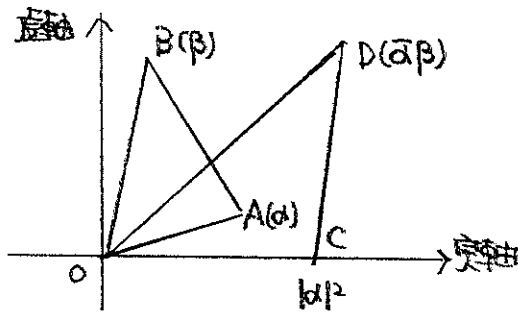
令和2年度

数学② 解答紙

理・医(保健学科放射線技術科学専攻, 検査技術科学専攻)・薬・工(4枚のうち, その2)

志望学部	学部
受験番号	

2 の解答欄



$$(問1) \arg \frac{\bar{\alpha}\beta}{\alpha\beta} = \arg \frac{\bar{\alpha}\beta}{\alpha\alpha} = \arg \frac{\beta}{\alpha}$$

よって, $\angle AOB = \angle COD (= \theta \text{ とおく})$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\frac{1}{2} OC \cdot OD \sin \theta}{\frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \theta} \\ &= \frac{|\alpha|^2 |\bar{\alpha}\beta|}{|\alpha| |\beta|} \\ &= \frac{|\alpha|^2 |\alpha| |\beta|}{|\alpha| |\beta|} = |\alpha|^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \frac{S_2}{S_1} = |\alpha|^2 \dots (\text{答})$$

(問2) $\triangle OCD$ において, OC を底辺と考えれば
高さは $|\operatorname{Im}(\alpha\beta)|$

$$\therefore S_2 = \frac{1}{2} |\alpha|^2 |\operatorname{Im}(\alpha\beta)|$$

$$(1) \text{より, } S_1 = \frac{S_2}{|\alpha|^2} = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\alpha\beta)|$$

$$\text{よって, } S_1 = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\alpha\beta)|$$

(問3) $\triangle OPQ$ の面積を S とおくと

$$(2) \text{より, } S = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{z} \cdot \frac{1}{z})|$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{z} \cdot \frac{1}{z} &= \frac{a-bi}{a+bi} \\ &= \frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{-2abi}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2} \left| \frac{-2ab}{a^2+b^2} \right| = \frac{ab}{a^2+b^2} \quad (\because ab > 0) \\ &= \frac{\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} = t \text{ とおくと}$$

$$S = \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{t+\frac{1}{t}}$$

ここで, $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ より $\frac{1}{2} \leq t \leq 3$

よって, $f(t) = t + \frac{1}{t} \quad (\frac{1}{2} \leq t \leq 3)$ とおくと

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{ を解くと, } t = 1$$

よって, $f(t)$ の増減は下表のようになる

t	$\frac{1}{2}$	$\dots$	1	$\dots$	3
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$

$$\frac{5}{2} < \frac{10}{3} \text{ であるので, } 2 \leq f(t) \leq \frac{10}{3}$$

$$S = \frac{1}{f(t)} \text{ である}$$

$$\frac{3}{10} \leq S \leq \frac{1}{2}$$

よって, S の最大値は $\frac{1}{2}$, 最小値は $\frac{3}{10} \dots (\text{答})$

令和2年度

数学② 解答紙

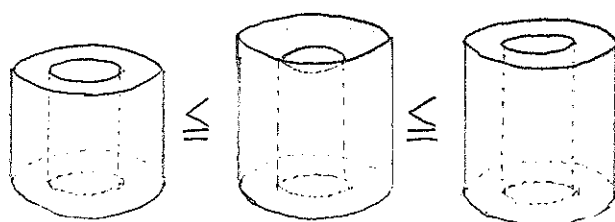
理・医(保健学科放射線技術科学専攻, 検査技術科学専攻)・薬・工(4枚のうち, その3)

志望学部	学部
受験番号	

3 の解答欄

(問1) $a \leq x \leq b$ のとき

$$\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b} \text{ である.}$$



上図より $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

(問2) (問1) の不等式から, $b - a > 0$ より

$$\pi(b+a) \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{V(b) - V(a)}{b - a} \leq \pi(b+a) \frac{1}{\cos^2 b}$$

$a = t$, $b = t + \Delta t$ とすると

$$\pi(2t + \Delta t) \frac{1}{\cos^2 t} \leq \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} \leq \pi(2t + \Delta t) \frac{1}{\cos^2(t + \Delta t)}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \pi(2t + \Delta t) \frac{1}{\cos^2 t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \pi(2t + \Delta t) \frac{1}{\cos^2(t + \Delta t)} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\text{したがって } \frac{d}{dt} V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

(問3)

$$V(x) = \int_0^x \frac{d}{dt} V(t) dt$$

$$= \int_0^x 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$= 2\pi \int_0^x t (\tan t)' dt$$

$$= 2\pi \left([t \tan t]_0^x - \int_0^x \tan t dt \right)$$

$$= 2\pi \left([t \tan t]_0^x - [-\log |\cos t|]_0^x \right)$$

$$= 2\pi (x \tan x + \log(\cos x))$$

したがって

$$V\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{3} + \log\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi^2 + 2\pi \log \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi^2 - 2\pi \log 2 \quad \dots (\text{答})$$

	点
--	---

令和2年度

数学②解答紙

理・医(保健学科放射線技術科学専攻, 検査技術科学専攻)・薬・工(4枚のうち, その4)

志望学部	学部
受験番号	

4 の解答欄

	点
--	---

(問1)

2点からの距離の和が一定である点の軌跡は楕円であるので、Cは2焦点 $(-t, 0)(t, 0)$ からの距離の和が $2\sqrt{t}$ である楕円をx軸方向に $2t$ だけ平行移動したものである。よって

$$C: \frac{(x-2t)^2}{2t^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \quad \text{である。}$$

これと $y = x - 1$ を連立してまとめると

$$3x^2 - 4(t+1)x + 2(t^2+1) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

求める条件は $(\textcircled{1} \text{の判別式}) > 0$ より

$$-2t^2 + 8t - 2 > 0 \quad \therefore \underline{2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}} \quad \dots (\text{答})$$

(問2)

Cと ℓ の2つの共有点を $P(\alpha, \alpha-1), Q(\beta, \beta-1)$ ($\alpha < \beta$) とおく。

$$\begin{aligned} \triangle OPQ &= \frac{1}{2} |\alpha(\beta-1) - \beta(\alpha-1)| \\ &= \frac{1}{2} |\beta - \alpha| = \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \quad [\because \beta - \alpha > 0] \end{aligned}$$

α, β は $\textcircled{1}$ の相異なる2つの実数解より

$$\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{-2(t-2)^2 + 6}}{3}$$

$$\text{よって } \triangle OPQ = \frac{1}{3} \sqrt{-2(t-2)^2 + 6}$$

(問1)の範囲で

$$\triangle OPQ \text{ は } t=2 \text{ で } \underline{\text{最大値 } \frac{\sqrt{6}}{3}} \quad \dots (\text{答})$$