

令和2年度

数学③ 解答紙

医(医学科) (4枚のうち, その1)

志望学部	学部
受験番号	

1 の解答欄

	点
--	---

(問1) $\frac{dx}{dt} = \cos t$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{dx}{dt}$		+	-
x		↑	↓

x は $t = \frac{\pi}{2}$ のとき最大

∴ t のとき $P(1, 1)$... (答)

$\frac{dy}{dt} = 3 \sin 3t$

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{dy}{dt}$		+	-
y		↑	↓

y は $t = \frac{\pi}{3}$ のとき最大

∴ t のとき $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$... (答)

(問2) $\sin t = \frac{1}{2}$, $1 - \cos 3t = 1$. ($0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$)

を満す t は $t = \frac{\pi}{6}$

∴ t のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$

よって C 上の点 $(\frac{1}{2}, 1)$ における接線の方程式は

$y = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) + 1$

∴ $y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1$... (答)

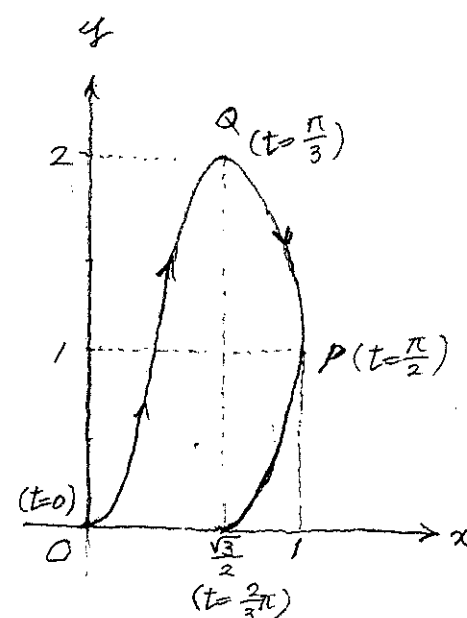
(問3) C のグラフの概形は右のようになる。

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $y_1 = 1 - \cos 3t$

$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ のとき $y_2 = 1 - \cos 3t$ とする

求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 y_1 dx - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 y_2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 3t) \cdot \cos t dt - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 3t) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 3t) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left\{ \cos t - \frac{1}{2}(\cos 4t + \cos 2t) \right\} dt \\ &= \left[\sin t - \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{16} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



令和2年度

数学③ 解答紙

医(医学科) (4枚のうち, その2)

志望学部	学部
受験番号	

2

の解答欄

	点
--	---

数学② 2 と同様

令和2年度

数学③ 解答紙

医(医学科) (4枚のうち, その3)

志望学部	学部
受験番号	

3 の解答欄

	点
--	---

(問1) n を自然数とする

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5n \text{ のとき, } x^2 = 5(5n^2) \\ x = 5n-1 \text{ のとき, } x^2 = 5(5n^2-2n)+1 \\ x = 5n-2 \text{ のとき, } x^2 = 5(5n^2-4n)+4 \\ x = 5n-3 \text{ のとき, } x^2 = 5(5n^2-6n+1)+4 \\ x = 5n-4 \text{ のとき, } x^2 = 5(5n^2-8n+3)+1 \end{array} \right.$$

以上より, x^2 を5で割った余りは0, 1, 4のいずれかである

(問2) $5y^2 = 2z^2 - x^2$ とすると左辺は5の倍数

このとき, (1)の結果より,

z^2, x^2 はいずれも5で割った余りが0

$z = 5S, x = 5x$ (S, x は自然数) とすると

$$5y^2 = 2(5S)^2 - (5x)^2$$

$$y^2 = 5(2S^2 - x^2) \text{ ——— ①}$$

$2S^2 - x^2$ は整数であることより, y^2 は5の倍数

$y = 5h$ (h は自然数) とおくと①は

$$(5h)^2 = 5(2S^2 - x^2)$$

$$\therefore x^2 + 5h^2 = 2S^2$$

以下, これをくり返すと, ある自然数 (x, y, z)

より小さい自然数が有限であることに矛盾する

よって, $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数は

存在しない

志望学部	学部
受験番号	

4 の解答欄

点

(問1) $1 < 2^y < (1 + \frac{x}{n})^n \iff 0 < y < n \log_2(1 + \frac{x}{n})$ であるから

直線 $x=k$ 上の格子点の個数を $Q(n, k)$ とすると

$$n \log_2(1 + \frac{k}{n}) - 1 \leq Q(n, k) < n \log_2(1 + \frac{k}{n})$$

が"いえる。 $k=1, 2, \dots, n-1$ について、各辺の和をとると、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2(1 + \frac{k}{n}) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2(1 + \frac{k}{n})$$

$$(問2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} n \log_2(1 + \frac{k}{n})}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2(1 + \frac{k}{n}) = \int_0^1 \log_2(1+x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\log_2(1+x)}{\log 2} dx = \frac{1}{\log 2} \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{\log 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2(1 + \frac{k}{n}) - 1 \right\}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2(1 + \frac{k}{n}) - \frac{1 - \frac{1}{n}}{n} \right\} = 2 - \frac{1}{\log 2}$$

(したがって、(1)の不等式から、はさみうちの原理により、)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = \underline{\underline{2 - \frac{1}{\log 2}}}$$

(問3) $y = \log_2(1+x)$ のグラフが"上に凸であることから

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log_2(1+x) dx - \frac{1}{n} \log_2(1 + \frac{k}{n}) > \frac{1}{2n} \left\{ \log_2(1 + \frac{k+1}{n}) - \log_2(1 + \frac{k}{n}) \right\}$$

が"いえるので、 $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ について和をとると

$$\int_0^1 \log_2(1+x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2(1 + \frac{k}{n}) > \frac{1}{2n} (1 - \log_2 1) = \frac{1}{2n}$$

よって

$$\underline{\underline{2 - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}}}$$