1 の解答欄

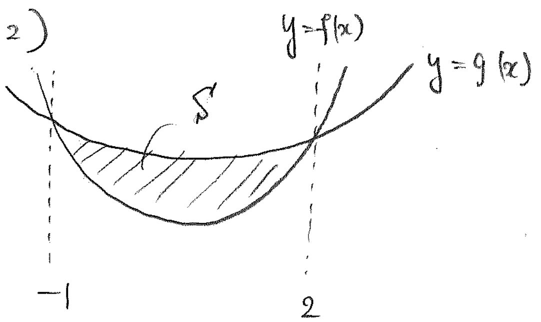
(問1) $f(x)=g(x)$ より $\frac{3}{2}x^2-2x-4=\frac{1}{2}x^2-x-2$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0 \qquad \therefore\ x=-1,\ 2$$

$a>b$ より $\underline{\underline{a=2,\ b=-1}}$ ……(答)

(問2)

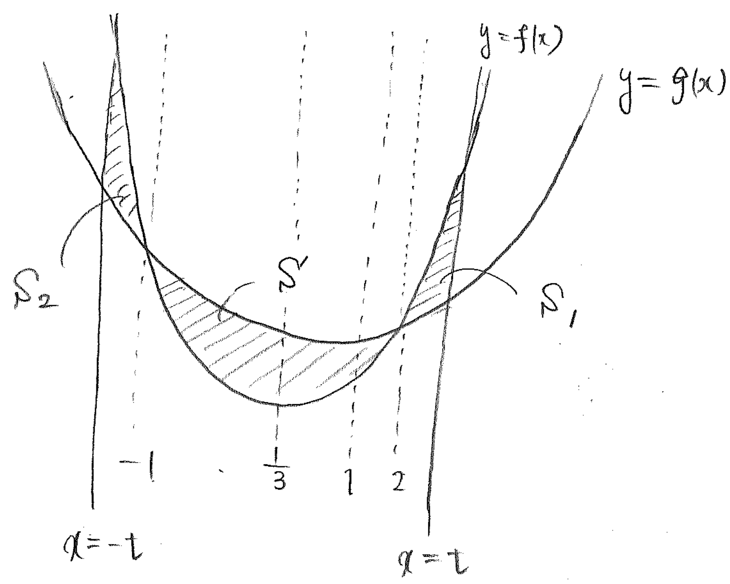


$$S=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))dx=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)dx=-\frac{-1}{6}(2-(-1))^3=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$ ……(答)

(問3) $t>|2|$ かつ $t>|-1|$ より $t>2$

このとき、与不等式の表す領域を図示すると右図の斜線部分のようになる。



$S_1+S_2=S$

$$\Leftrightarrow \int_{2}^{t}(f(x)-g(x))dx+\int_{-t}^{-1}(f(x)-g(x))dx=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-t}^{-1}(f(x)-g(x))dx+\int_{-1}^{2}(f(x)-g(x))dx+\int_{2}^{t}(f(x)-g(x))dx=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-t}^{t}(f(x)-g(x))dx=0 \Leftrightarrow \int_{-t}^{t}(x^2-x-2)dx=0$$

$$\Leftrightarrow 2\int_{0}^{t}(x^2-2)dx=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{3}t^3-2t\right)=0 \Leftrightarrow t(t^2-6)=0$$

$t>2$ より $\underline{\underline{t=\sqrt{6}}}$ ……(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

[redacted]

2 の解答欄

(問1) ℓ 上の点Pは

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

とおける。すなわち

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}t\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c} \quad \text{---①}$$

係数の和は

$$\frac{2}{3}t + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right) + \frac{2}{3} - \frac{t}{3} = 1$$

よって 点Pは平面ABC上にあるので

ℓ は平面 α 上にある。

(問2) 点XはAC上にあるので

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AC}$ (sは実数)とおける。

$$\overrightarrow{OX} = (1-s)\vec{a} + s\vec{c} \quad \text{---②}$$

点Xは ℓ 上の点なので

$$\overrightarrow{OX} = \frac{2}{3}t\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c} \quad \text{---③}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないので②,③より

$$\begin{cases} 1-s = \frac{2}{3}t \\ 0 = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} \\ s = \frac{2}{3} - \frac{t}{3} \end{cases}$$

これを解いて $s = \frac{1}{3}$, $t = 1$

よって $\overrightarrow{OX} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$ ---(答)

(問3) 点Fは点Oと ℓ 上の点Yを通る直線上にあるので

$\overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OY}$ (kは実数)とおける。

点Yは ℓ 上にあるから①より

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}kt\vec{a} + k\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + k\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c} \quad \text{---④}$$

点Fは直線EC上にあるので

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + u\overrightarrow{EC}$ (uは実数)とおける。

$$\overrightarrow{OF} = (1-u)\overrightarrow{OE} + u\overrightarrow{OC}$$

ここで $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OD} = 2\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \vec{a}+\vec{b}$

であるから

$$\overrightarrow{OF} = (1-u)\vec{a} + (1-u)\vec{b} + u\vec{c} \quad \text{---⑤}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないので④,⑤より

$$\begin{cases} \frac{2}{3}kt = 1-u & \text{---⑥} \\ k\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right) = 1-u & \text{---⑦} \\ k\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right) = u & \text{---⑧} \end{cases}$$

⑥,⑦より $\frac{2}{3}kt = k\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)$

$k \neq 0$ より $t = \frac{1}{3}$

⑥より $\frac{2}{9}k = 1-u$

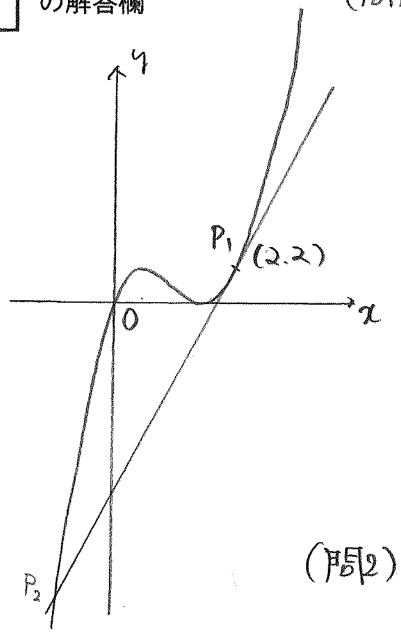
⑧より $\frac{5}{9}k = u$

したがって $k = \frac{9}{7}$, $u = \frac{5}{7}$

よって $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{5}{7}\vec{c}$ ---(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

3 の解答欄



(問1)

$f(x)=x^3-2x^2+x$ とおくと

$f'(x)=3x^2-4x+1$

$f'(2)=5$ より　l_1 は　$y-2=5(x-2)$

$\therefore y=5x-8$

$x^3-2x^2+x=5x-8$ より

$(x-2)^2(x+2)=0$　よって P_2 の x座標は $x=-2$

l_1 に代入して $y=-18$　　　よって $\underline{\underline{P_2(-2,-18)}}$ ……(答)

(問2)　$x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ より

$y-(t^3-2t^2+t)=(3t^2-4t+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$ …①

P_n の x座標が $x=a_n$ なので
①において $t=a_n$ とすると

$$\begin{cases} l_n の傾き\ 3a_n^2-4a_n+1 \\ l_n の y切片\ -2a_n^3+2a_n^2 \end{cases}$$ ……(答)

(問3)　①を用いて　$x^3-2x^2+x=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$

$x^3-2x^2-(3t^2-4t)x+2t^3-2t^2=0$

$\therefore (x-t)^2(x+2t-2)=0$　より　　$x=t,\ -2t+2$

接点ではない方の x座標は $x=-2t+2$ であるから　$t=a_n$ とすると

$a_{n+1}=-2a_n+2$

$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-2\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$ より

数列 $\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$ は公比 -2 の等比数列　　$a_1=2$ であるから

$a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)(-2)^{n-1}$ より　　$\underline{\underline{a_n=\frac{4}{3}(-2)^{n-1}+\frac{2}{3}}}$ ……(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

4 の解答欄

$$\begin{cases} x^3+2ax^2-a^2x-2a^3<0 \cdots ① \\ 3x^2-x<4a-12ax \cdots ② \end{cases}$$

(問1) ①は $x^2(x+2a)-a^2(x+2a)<0$

$(x-a)(x+a)(x+2a)<0$

$a>1$ より

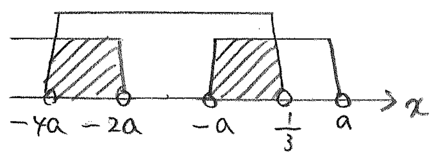
$x<-2a,\ -a<x<a \cdots ①'$

②は $3x^2+(12a-1)x-4a<0$

$(3x-1)(x+4a)<0$

$a>1$ より $-4a<x<\frac{1}{3} \cdots ②'$

①', ②'より



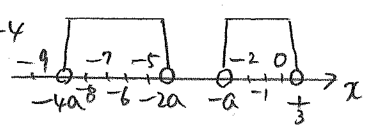
$-4a<x<-2a,\ -a<x<\frac{1}{3}$ …(答)

(問2) $a=2+k$ (ただし k は $0<k\leqq 1$) とする

(i) $0<k\leqq\frac{1}{4}$ のとき

$-\frac{9}{4}\leqq -a<-2,\ -\frac{9}{2}\leqq -2a<-4$

$-9\leqq -4a<-8$ なので

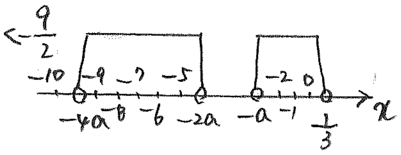


$m(a)=7$

(ii) $\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$ のとき

$-\frac{5}{2}<-a<-\frac{9}{4},\ -5<-2a<-\frac{9}{2}$

$-10<-4a<-9$ なので

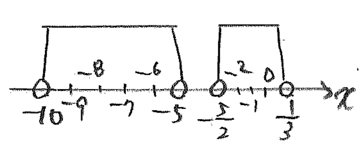


$m(a)=8$

(iii) $k=\frac{1}{2}$ のとき

$-a=-\frac{5}{2},\ -2a=-5$

$-4a=-10$ なので

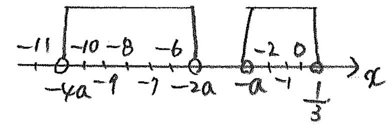


$m(a)=7$

(iv) $\frac{1}{2}<k\leqq\frac{3}{4}$ のとき

$-\frac{11}{4}\leqq -a<-\frac{5}{2},\ -\frac{11}{2}\leqq -2a<-5$

$-11\leqq -4a<-10$ なので

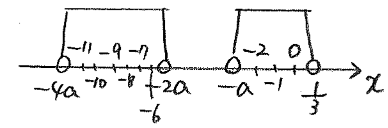


$m(a)=8$

(v) $\frac{3}{4}<k<1$ のとき

$-3<-a<-\frac{11}{4},\ -6<-2a<-\frac{11}{2}$

$-12<-4a<-11$ なので

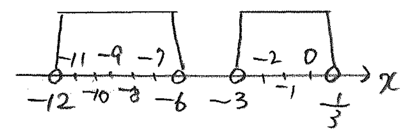


$m(a)=9$

(vi) $k=1$ のとき

$-a=-3,\ -2a=-6$

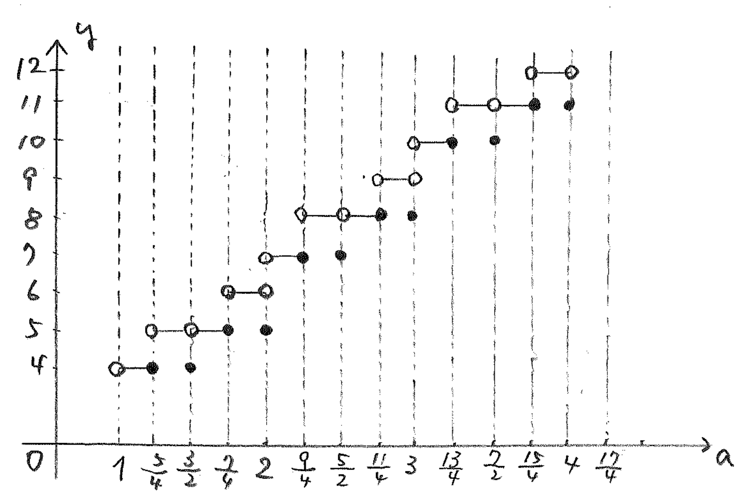
$-4a=-12$ なので



$m(a)=8$

$a=n+k$ (n は自然数) とすると,

$y=m(a)$ のグラフは以下のようになる



よって $a>2$ においては $2<a\leqq\frac{9}{4}$, $a=\frac{5}{2}$ のとき

最小値 7 …(答)

(問3)

上記のグラフより $m(a)=4$ をみたす a の範囲は

$1<a\leqq\frac{5}{4},\ a=\frac{3}{2}$ …(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。