1 の解答欄

(問1)

ℓ 上の任意の点をPとすると

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} + \dfrac{2}{3}t\left(\vec{a} - \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$

BC を 2:1 に内分する点を Q
BC の中点を M とすると

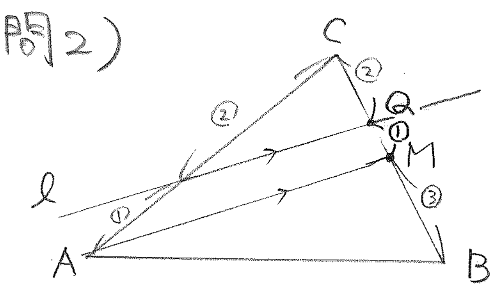
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \dfrac{2}{3}t\,(\overrightarrow{MA})$ （t：実数）

よって直線 ℓ は点Qを通り
$\overrightarrow{MA}$ を方向ベクトルとする直線である

したがって，ℓ は平面 α 上にある。

…（証明終り）

(問2)



(問1) より

$\begin{cases} BM:MC = 1:1 \\ BQ:QC = 2:1 \end{cases}$

$\therefore$ BM:MQ:QC = 3:1:2

また，$\ell \parallel AM$ に注目すると

直線 ℓ は 辺ACと交点を1個，
辺BCと交点を1個もつ
辺ABとは交点をもたない

…（答）

ここで 辺AC，BC との交点を
各々 X_1，X_2 とすると

$\overrightarrow{OX_1} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{3} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$ …（答）

(問3)

点Fは直線OY上より

$\overrightarrow{OF} = \dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \dfrac{kt}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$

（k，t：実数）

$= \dfrac{2kt}{3}\vec{a} + \dfrac{k}{3}(1-t)\vec{b} + \dfrac{k}{3}(2-t)\vec{c}$

…①

また，点Fは直線EC上より

$\overrightarrow{OF} = (1-m)\overrightarrow{OE} + m\vec{c}$ （m：実数）

$= (1-m)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + m\vec{c}$ …②

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立より ① ② から

$\begin{cases} \dfrac{2}{3}kt = 1-m \\ \dfrac{k(1-t)}{3} = 1-m \\ \dfrac{k(2-t)}{3} = m \end{cases}$

解くと $m = \dfrac{5}{7}$，$k = \dfrac{9}{7}$，$t = \dfrac{1}{3}$

したがって

$\overrightarrow{OF} = \dfrac{2}{7}\vec{a} + \dfrac{2}{7}\vec{b} + \dfrac{5}{7}\vec{c}$ …（答）

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

$\boxed{2}$ の解答欄

数学①の $\boxed{3}$ と同じ

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

3 の解答欄

(問1) $\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$ ……①

①をwについて整理して

$$4(\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2)-w^2(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=0$$

α, β, γ は相異なる複素数なので,

よって $$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=\frac{w^2}{4}$$ …② ……(答)

(問2) ②より $$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{w}{2}$$

△ABCが正三角形であるとき $\frac{w}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right),\ -\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

(複号同順)

これを解いて $w=1\pm\sqrt{3}i,\ -1\pm\sqrt{3}i$

wは実部・虚部ともに正なので $w=1+\sqrt{3}i$ ……(答)

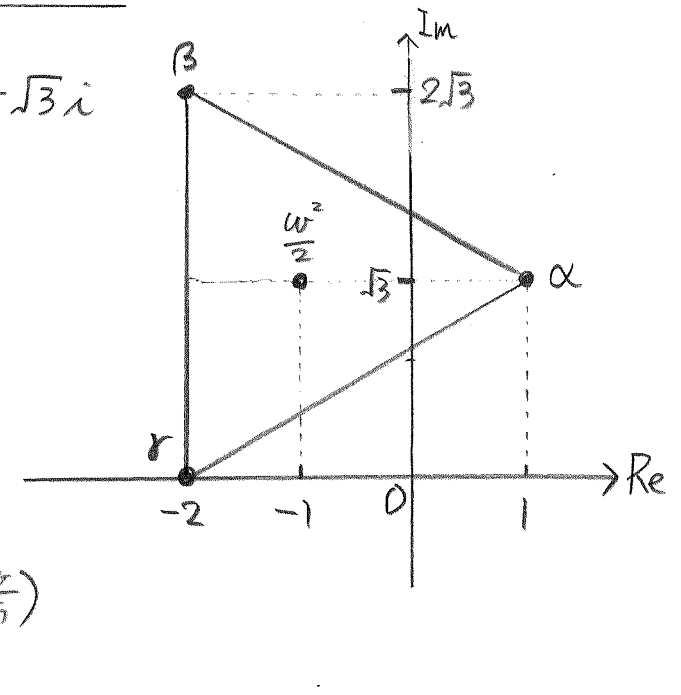
(問3) △ABCが正三角形であるとき, (問2)より $w=1+\sqrt{3}i$

$w=\alpha$ より $\alpha=1+\sqrt{3}i$

△ABCの重心が点 $\frac{w^2}{2}$ であるとき,

$$\frac{w^2}{2}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{2}=-1+\sqrt{3}i$$

であるから, 点 α, β, γ, $\frac{w^2}{2}$ の位置関係は
右図のようになる。



したがって $\beta=-2+2\sqrt{3}i,\ \gamma=-2$ …(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

4 の解答欄

(問1) $\sin x = \sin 2x \quad \cdots ①$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

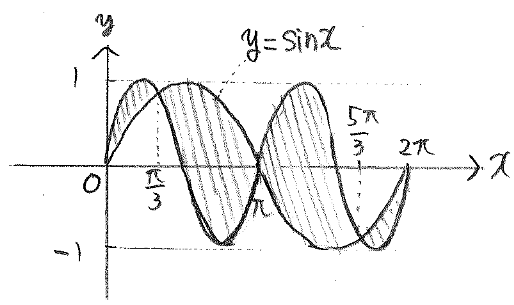
$\therefore \sin x = 0$ または $\cos x = \frac{1}{2}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ だから $\underline{\underline{x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi}} \cdots$(答)

(問2)

①を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で解くと

$x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$



$\int_0^{2\pi} |\sin x - \sin 2x|\,dx$ は，上図の斜線部の面積 S を表すので

$$S = 2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x - \sin x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin 2x - \sin x)\,dx\right\}$$

$$= 2\left\{\left[\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\right\}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{5}} \cdots \text{(答)}$$

(問3)

$I_n = \int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。

I_n において $nx = t$ とおくと

x	$0 \to 2\pi$
t	$0 \to 2n\pi$

$\frac{dt}{dx} = n$

$$\therefore I_n = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} |\sin t - \sin 2t|\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} |\sin t - \sin 2t|\,dt$$

$u = t - (2k-2)\pi$ とおくと

t	$(2k-2)\pi \to 2k\pi$
u	$0 \to 2\pi$

$\frac{du}{dt} = 1$

よって $I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} |\sin u - \sin 2u|\,du$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S$$

$$= \underline{\underline{5}} \cdots \text{(答)}$$

(問4)

$J_n = \int_0^{c} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx$ とする。

ある自然数 n に対して $2(k-1)\pi \leqq nc < 2k\pi \cdots ②$ をみたす自然数 k が存在する。このとき

$$\int_0^{\frac{2(k-1)\pi}{n}} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx \leqq J_n \leqq \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx$$

$nx = t$ とおくと (問3) と同様にして

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{2k\pi} |\sin t - \sin 2t|\,dt$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{k}\int_0^{2k\pi} |\sin t - \sin 2t|\,dt$$

$$= \frac{k}{n} \cdot I_k$$

$$= \frac{5k}{n}$$

よって $\frac{5(k-1)}{n} \leqq J_n \leqq \frac{5k}{n}$

$\therefore \frac{5k}{n} - \frac{5}{n} \leqq J_n \leqq \frac{5k}{n}$

ここで②より $\frac{c}{2\pi} < \frac{k}{n} \leqq \frac{c}{2\pi} + \frac{1}{n}$

はさみうちの原理より $\lim_{n \to \infty} \frac{k}{n} = \frac{c}{2\pi}$

よって $\lim_{n \to \infty} J_n = \underline{\underline{\frac{5c}{2\pi}}} \cdots$(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。