1 の解答欄

(問1) $\overrightarrow{OY} = s\overrightarrow{OX}$ （sは実数）と表せる。

$$\overrightarrow{OY} = s\left\{\frac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\right\}$$

$$= sk\left\{\frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\right\}$$

点Yは直線OXと平面αの交点なので

$$sk\left\{\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\right\} = 1$$

$$\therefore sk = 1$$

ゆえに $\overrightarrow{OY} = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$ …①

(i) 直線ABとmの交点は

$\frac{2}{3}-\frac{t}{3}=0$ すなわち $t=2$ のときで

①より $\overrightarrow{OY} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ となり Yは辺AB上にない。

(ii) 直線BCとmの交点は

$\frac{2t}{3}=0$ すなわち $t=0$ のときで

①より $\overrightarrow{OY} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ となり Yは辺BC上にある。

(iii) 直線CAとmの交点は

$\frac{1}{3}-\frac{t}{3}=0$ すなわち $t=1$ のときで

①より $\overrightarrow{OY} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$ となり Yは辺CA上にある。

したがって (i),(ii),(iii)より

△ABCの各辺とmとの交点は 2個 …(答)

そのときの交点Zは

$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{OZ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$ …(答)

(問2) $\overrightarrow{OX} = \frac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

$= \frac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) - \frac{tk}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

と表されるので、ℓの方向ベクトルの1つは $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ である。

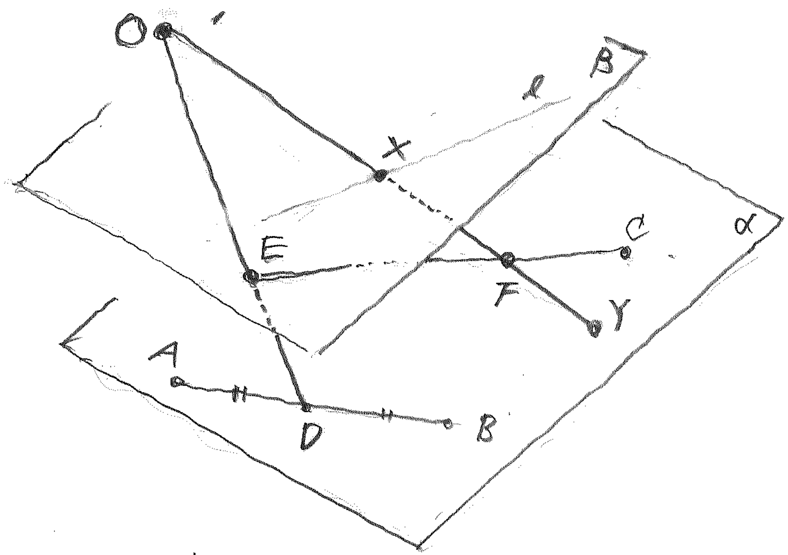
よってℓは平面αと平行である。

点Eは平面β上の点なので

$\overrightarrow{OE} = \frac{k}{3}(\vec{b}+\vec{c}) + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

（x, yは実数）と表せる。

$\therefore \overrightarrow{OE} = (-x-y)\vec{a} + \left(x+\frac{k}{3}\right)\vec{b} + \left(y+\frac{2k}{3}\right)\vec{c}$ …②



また点Eは直線OD上の点なので

$\overrightarrow{OE} = z\overrightarrow{OD}$ （zは実数）と表せる。

$\therefore \overrightarrow{OE} = z\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ …③

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないので ②,③より

$$\begin{cases} -x-y = \frac{z}{2} \\ x+\frac{k}{3} = \frac{z}{2} \\ y+\frac{2k}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{6} \\ y = -\frac{2k}{3} \\ z = k \end{cases}$$

よって $\overrightarrow{OE} = \frac{k}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ …④

点Fは直線EC上の点なので

$\overrightarrow{OF} = (1-p)\overrightarrow{OE} + p\overrightarrow{OC}$ （pは実数）と表せる。

④より $\overrightarrow{OF} = \frac{(1-p)k}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + p\vec{c}$ …⑤

また点Fは直線OY上の点なので

$\overrightarrow{OF} = q\overrightarrow{OY}$ （qは実数）と表せる。

①より $\overrightarrow{OF} = q\left\{\frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\right\}$ …⑥

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないので ⑤,⑥より

$$\begin{cases} \frac{(1-p)k}{2} = \frac{2t}{3}q \\ \frac{(1-p)k}{2} = \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)q \\ p = \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ p = \frac{5k}{5k+4} \\ q = \frac{9k}{5k+4} \end{cases}$$

ゆえに $\overrightarrow{OF} = \frac{k}{5k+4}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})$ …(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

2 の解答欄

(問1) $\gamma-\alpha=s,\ \beta-\alpha=t$ とおくと

$$\{(\omega+2)\alpha\}^2+(\omega\beta)^2-(2\gamma)^2$$
$$=4(\omega+2)\alpha^2+2\omega^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

より

$$(\omega+2)^2\alpha^2+\omega^2(t+\alpha)^2-4(s+\alpha)^2$$
$$=4(\omega+2)\alpha^2+2\omega^2\alpha(t+\alpha)-8\alpha(s+\alpha)$$

$$\omega^2t^2-4s^2=0$$

$t\neq0$ より $\omega^2-4\left(\frac{s}{t}\right)^2=0$

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=\frac{\omega^2}{4}\qquad\therefore\ \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\omega}{2}\ \cdots①$$

ω の実部，虚部はともに正であるから

$0\leqq\theta<2\pi$ より $\underline{0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi}$ …(答)

(問2) $\triangle ABC$ が正三角形であるとき

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\ \cdots②$$

①，②より

$$\frac{\omega}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right),$$
$$-\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\ (\text{複号同順})$$

$$=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

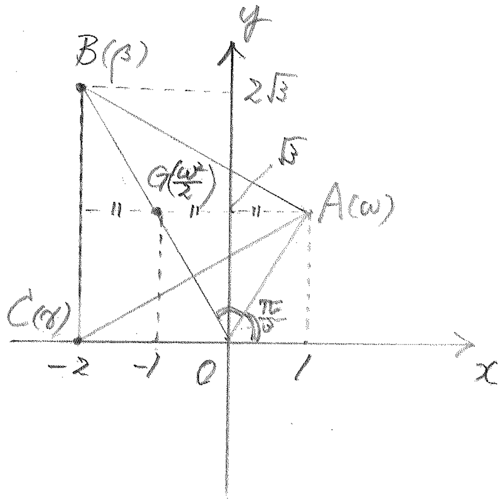
ω の実部，虚部はともに正であるから

$$\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad\therefore\ \underline{\omega=1+\sqrt{3}i}\ \cdots(\text{答})$$

(問3) $\omega=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$\frac{\omega^2}{2}=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$G\left(\frac{\omega^2}{2}\right)$ とすると，2点 B, C は直線 AG に関して対称で，$\overrightarrow{AB}$ から $\overrightarrow{AC}$ に向かう角が $\frac{\pi}{3}$ であることから，3点 A, B, C の位置は下の図のようになる。



よって $\underline{\beta=-2+2\sqrt{3}i,\ \gamma=-2}$ …(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

3 の解答欄

(1) $MP^2=\frac{1}{4}(2e^{2t}+2e^{-2t}-4e^{t}+4e^{-t}+4)$

$=\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}-1)^2+\frac{3}{2}$

$e^{t}-e^{-t}=1$ のとき MP は最小となり

$(e^{t})^2-e^{t}-1=0$ より $e^{t}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$e^{t}>0$ であることから $t_0=\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ …… (答)

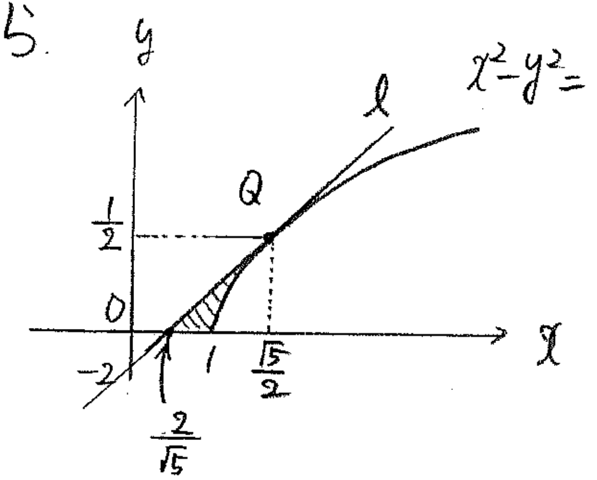
(2) $\begin{cases} x^2=\frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t}) & \text{──①} \\ y^2=\frac{1}{4}(e^{2t}-2+e^{-2t}) & \text{──②} \end{cases}$

①－②より Cが描く図形の方程式は $x^2-y^2=1\ (x\geqq 1)$

$t=t_0$ において $Q\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right)$ であることから

直線 l の方程式は $\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{1}{2}y=1$

よって、求める面積は



$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}-\int_{1}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$

$=\frac{\sqrt{5}}{40}-\frac{1}{4}\int_{0}^{t_0}(e^{t}-e^{-t})^2dt$

$=\frac{\sqrt{5}}{40}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{0}^{t_0}$

$=\frac{\sqrt{5}}{40}-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}$ …… (答)

(3) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\pi(y^2+1)dy-\left\{\pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}-\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\times2\times\frac{1}{3}\right\}$

$=\pi\left[\frac{1}{3}y^3+y\right]_{0}^{\frac{1}{2}}-\frac{61}{120}\pi$

$=\frac{\pi}{30}$ …… (答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

4 の解答欄

(問1) $f(x)=|\sin nx-\sin 2nx|$ とおくと，$f(x)$ は周期 $\frac{2\pi}{n}$ の周期関数で

$f\left(\frac{2\pi}{n}-x\right)=|\sin(2\pi-nx)-\sin(4\pi-2nx)|=f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\frac{\pi}{n}$

に関して対称である。また，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{n}$ において

$$f(x)=|\sin nx||1-2\cos nx|=\begin{cases}-\sin nx+\sin 2nx & \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3n}\right)\\ \sin nx-\sin 2nx & \left(\frac{\pi}{3n}\leqq x\leqq\frac{\pi}{n}\right)\end{cases}$$

よって

$$\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|dx=\sum_{k=0}^{2n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}|\sin nx-\sin 2nx|dx$$

$$=\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx-\sin 2nx|dx=\sum_{k=0}^{2n-1}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3n}}(-\sin nx+\sin 2nx)dx+\int_{\frac{\pi}{3n}}^{\frac{\pi}{n}}(\sin nx-\sin 2nx)dx\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n-1}\left\{\left[\frac{1}{n}\cos nx-\frac{1}{2n}\cos 2nx\right]_0^{\frac{\pi}{3n}}-\left[\frac{1}{n}\cos nx-\frac{1}{2n}\cos 2nx\right]_{\frac{\pi}{3n}}^{\frac{\pi}{n}}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{5}{2n}\right)=\underline{\underline{5}}\quad\cdots(答)$$

(問2) $\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx-\sin 2nx|dx=\frac{5}{2n}$ であるから

$$\frac{5}{2n}\left(\frac{c}{\frac{\pi}{n}}-1\right)\leqq\int_0^c|\sin nx-\sin 2nx|dx\leqq\frac{5}{2n}\left(\frac{c}{\frac{\pi}{n}}+1\right)$$

$$\frac{5c}{2\pi}-\frac{5}{2n}\leqq\int_0^c|\sin nx-\sin 2nx|dx\leqq\frac{5c}{2\pi}+\frac{5}{2n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi}-\frac{5}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi}+\frac{5}{2n}\right)=\frac{5c}{2\pi}$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^c|\sin nx-\sin 2nx|dx=\underline{\underline{\frac{5c}{2\pi}}}\quad\cdots(答)$$

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。