受験番号

令和4年度 **数学③解答紙**

医(医学科)　　(4枚のうち、その1)

問題		
1		点

1 の解答欄

(1)
$$\begin{cases}\overrightarrow{OG_1}=\left(\frac{a}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)\\ \overrightarrow{OG_2}=\left(\frac{a+1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)\\ \overrightarrow{P_1P_2}=(1,\ 0,\ 0)\end{cases}$$ より

$\overrightarrow{G_1G_2}=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$

よって、直線P_1P_2と直線G_1G_2は平行である。

(2) (1)の結果と、2点P_1, P_2がx軸上の点であることから、2直線P_1P_2、G_1G_2の距離dは、点G_1とx軸の距離と一致するので、

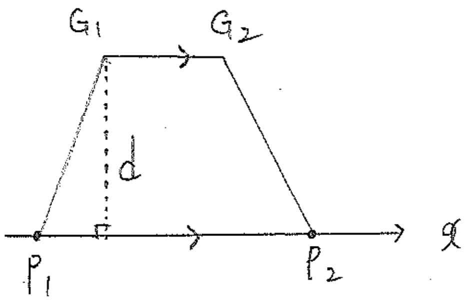
$d=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

$P_1P_2=1$, $G_1G_2=\frac{1}{3}$であるから

(四角形$P_1P_2G_1G_2$の面積)

$=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{10}}{9}$ ……(答)



(3) 平面$P_1P_2G_1$の法線ベクトルの1つを$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$とすると

$\overrightarrow{P_1P_2}\perp\vec{n}$, $\overrightarrow{P_1G_1}\perp\vec{n}$ であることより

$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}=0$, $\overrightarrow{P_1G_1}\cdot\vec{n}=0$

$x=0$, $-2ax+y+3z=0$

これより、$x:y:z=0:3:-1$

$\therefore\ \vec{n}=(0,\ 3,\ -1)$

平面$P_1P_2G_1$に、点Qより垂線QSを下ろすと、

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}+k\vec{n}$ (kは実数)

$=(0,\ 1+3k,\ -k)$

Sは平面$P_1P_2G_1$上の点であることから、

$\overrightarrow{P_1S}=l\,\overrightarrow{P_1P_2}+3m\,\overrightarrow{P_1G_1}$

$(-a,\ 1+3k,\ -k)=(l-2am,\ m,\ 3m)$

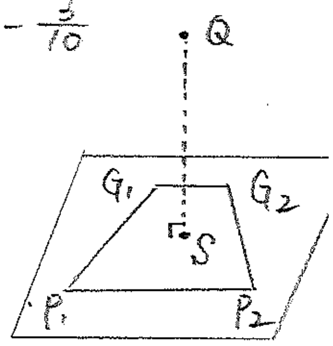
を満たす実数l, mが存在し、

$$\begin{cases}-a=l-2am\\ 1+3k=m\\ -k=3m\end{cases}\ \text{より}\ \begin{cases}l=-\frac{4}{5}a\\ m=\frac{1}{10}\\ k=-\frac{3}{10}\end{cases}$$

$\overrightarrow{QS}=-\frac{3}{10}\vec{n}$ であることから、

$|\overrightarrow{QS}|=\frac{3}{10}|\vec{n}|=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

よって四角錐$Q-P_1P_2G_1G_2$の体積は



$\frac{2\sqrt{10}}{9}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ ……(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

[redacted]

受験番号

令和4年度 数学③解答紙

医(医学科)　（4枚のうち，その2）

問題 2 点

$\boxed{2}$ の解答欄

(1) $f(x)=\sqrt{1+\sin^2\frac{\pi x}{2}}$

$=\sqrt{\frac{3-\cos\pi x}{2}}$ $(0\leqq x\leqq 1)$

$-1\leqq \cos\pi x\leqq 1$ より

$f(x)$ の最大値は $x=1$ のとき

$f(1)=\underline{\sqrt{2}}$ …(答)

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$, $\sqrt{2}x\geqq 0$

だから

$g(x)=\{f(x)\}^2-\{\sqrt{2}x\}^2$ …①

とおくと

$g(x)=\frac{3-\cos\pi x}{2}-2x^2$

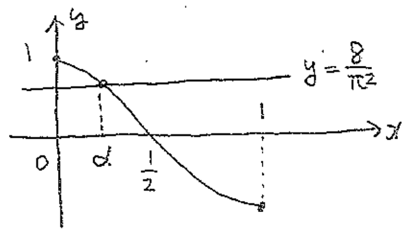
$g'(x)=\frac{\pi}{2}\sin\pi x-4x$

さらに

$g''(x)=\frac{\pi^2}{2}\cos\pi x-4$

$=\frac{\pi^2}{2}\left(\cos\pi x-\frac{8}{\pi^2}\right)$

$0<\frac{8}{\pi^2}<1$ より，$y=\cos\pi x$ と $y=\frac{8}{\pi^2}$ のグラフは次のようになる。

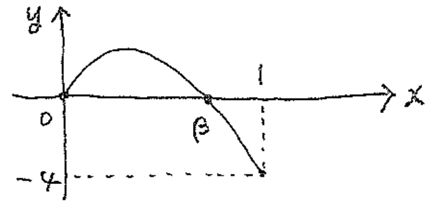


$0\leqq x\leqq 1$ において $g''(x)=0$ をみたす実数 x は1つ存在し，それを α とおくと $0<\alpha<\frac{1}{2}$ である。

すると $g'(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	-4

となり，$y=g'(x)$ のグラフは次のようになる。



よって，$0\leqq x\leqq 1$ において $g'(x)=0$ $(0<x\leqq 1)$ をみたす x は1つ存在し，それを β とおくと，$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって，$g(x)\geqq 0$ となり，①より

$f(x)\geqq\sqrt{2}x$

が成立する。

(3) (1)(2)より $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$0\leqq\sqrt{2}x\leqq f(x)\leqq\sqrt{2}$

よって

$(\sqrt{2}x)^n\leqq\{f(x)\}^n\leqq(\sqrt{2})^n$

各辺を0から1まで積分して

$$\int_0^1(\sqrt{2}x)^n dx\leqq\int_0^1\{f(x)\}^n dx\leqq\int_0^1(\sqrt{2})^n dx$$

よって

$$\frac{(\sqrt{2})^n}{n+1}\leqq a_n\leqq(\sqrt{2})^n$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{2}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\leqq\sqrt[n]{a_n}\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots ②$$

ここで，与えられた条件より

$$\lim_{n\to\infty}\log(n+1)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$$

よって，対数の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$$

これと，②において はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\underline{\sqrt{2}}\quad\cdots(答)$$

裏面は採点の対象としません。

受験番号	

令和４年度
数 学 ③

問 題		
3		点

受験番号	

令和４年度 数 学 ③ 解 答 紙

医(医学科)　　（４枚のうち，その３）

問 題		
3		点

3 の解答欄

(問1)

接点を $T(t, \sin t)$ $(t>0)$ とおくと

$y' = \cos x$ より，T における接線は

$y - \sin t = \cos t \times (x - t)$

これが点 $(-p, 0)$ を通るので

$-\sin t = \cos t(-p - t)$

$\sin t = p\cos t + t\cos t$

ここで，$\cos t = 0$ とすると

(左辺)$=\pm 1$，(右辺)$=0$ だから

$\cos t \neq 0$ としてよい。

よって，両辺を $\cos t$ でわって

$\tan t = p + t$

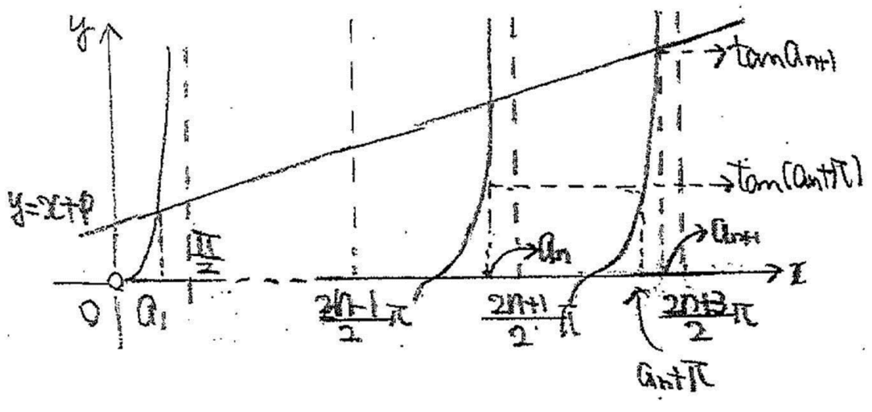
この方程式の解が a_n $(n=1,2,\cdots)$ だから

$\underline{\tan a_n = a_n + p}$ —①

(問2)

①より，a_n は，$y=\tan x$ と $y=x+p$ の

正の交点のうち，小さい方から n 番目の x 座標



ここで，$\tan a_{n+1} - \tan(a_n + \pi)$

$= \tan a_{n+1} - \tan a_n$

$= (a_{n+1} + p) - (a_n + p)$

$= a_{n+1} - a_n > 0$

$\frac{2n-1}{2}\pi < a_n < \frac{2n+1}{2}\pi$ より

$\frac{2n+1}{2}\pi < a_n + \pi < \frac{2n+3}{2}\pi$

また，$\frac{2n+1}{2}\pi < a_{n+1} < \frac{2n+3}{2}\pi$

$\frac{2n+1}{2}\pi < x < \frac{2n+3}{2}\pi$ において，

$y = \tan x$ は単調増加だから

$a_n + \pi < a_{n+1}$

$\therefore \underline{a_{n+1} - a_n > \pi}$

(問3)

$\tan a_{n+1} - \tan a_n$

$= (a_{n+1} + p) - (a_n + p)$

$= a_{n+1} - a_n$

よって，(問2)より

$\tan a_{n+1} - \tan a_n > \pi$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} (\tan a_{k+1} - \tan a_k) > \sum_{k=1}^{n} \pi$

$\tan a_{n+1} - \tan a_1 > n\pi$

$\tan a_{n+1} > n\pi + \tan a_1$

$\tan a_1 = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ だから，

$\underline{\underline{\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}}}$

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

令和４年度 **数学③解答紙** 医(医学科) （４枚のうち，その４） 受験番号 問題 4 点

4 の解答欄

（問1） $m=n=2$ とすると，両辺とも6になり成立．

よって，$(m,n)=\underline{(2,2)}$ …（答）

（問2）

(i) $m=1$ とすると

$$mn+2=n+2,\quad {}_{m+n}C_m=n+1$$

となり 成り立たない．

(ii) $m=2$ とすると

$$mn+2={}_{m+n}C_m \iff 2n+2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$
$$\iff n=2$$

(iii) $m\geqq 3$ とすると

$n\geqq m\geqq 3$ で，このとき

$$\frac{{}_{m+n}C_m}{mn+2}=\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots\cdots(n+2)(n+1)}{m\cdot(m-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{mn+2}$$
$$>\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{m-1}\cdot\frac{\cancel{n+1}}{m}\cdot\frac{1}{m(\cancel{n+1})}$$

ここで

$$\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\geqq\frac{1}{2}\cdot 2m(2m-1)=2m^2-m>m^2,$$

$$\frac{m+n-2}{3}>\frac{m+n-3}{4}>\cdots>\frac{n+2}{m-1}>1$$

であるから，

$${}_{m+n}C_m>mn+2.$$

(i)〜(iii) より，

$$(m,n)=(2,2)$$

である．

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。