受験番号	

令和５年度
数 学 ②

問 題		
1		点

受験番号	

令和５年度 数 学 ② 解 答 紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻，
検査技術科学専攻）・薬・工 （４枚のうち，その１）

問 題		
1		点

1 の解答欄

$(4n^2-1)(a_n-a_{n+1})=8(n^2-1)a_na_{n+1}$ ---(＊)

(問1) (＊)が $n=1$ のとき

$3(a_1-a_2)=0$

$a_1=\frac{1}{8}$ より $\underline{a_2=\frac{1}{8}}$ ---(答)

(＊)が $n=2$ のとき

$15(a_2-a_3)=24\times a_2a_3$

$18a_3=\frac{15}{8}$ ∴ $\underline{a_3=\frac{5}{48}}$ ---(答)

(問2) $a_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ ---①

①を数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき $a_1=\frac{1}{8}\neq 0$

よって成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$a_k\neq 0$ ---②

(＊)より $(4k^2-1)(a_k-a_{k+1})=8(k^2-1)a_ka_{k+1}$

$a_{k+1}=0$ とすると $(4k^2-1)a_k=0$

$4k^2-1>0$ より $a_k=0$ となり②と矛盾

よって $a_{k+1}\neq 0$ であるから $n=k+1$ で成立つ

(i)(ii)より ①は成り立つ

(問3) (＊)の両辺を $(4n^2-1)a_na_{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{8(n^2-1)}{4n^2-1}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{2(4n^2-1)-6}{4n^2-1}$$

∴ $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\underline{2-\frac{6}{4n^2-1}}$ ---(答)

(問4) $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ の階差数列は $\left\{2-\frac{6}{4n^2-1}\right\}$

であるから

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2-\frac{6}{4k^2-1}\right)\ (n\geqq 2)$$

ここで $\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)$

よって $\frac{1}{a_n}=8+2(n-1)-6\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)$

$=2n+3+\frac{3}{2n-1}$

$=\frac{(2n+3)(2n-1)+3}{2n-1}$

$=\frac{4n(n+1)}{2n-1}$

$a_n=\frac{2n-1}{4n(n+1)}$

これは $a_1=\frac{1}{8}$ となり $n=1$ のとき成り立つ

∴ $\underline{a_n=\frac{2n-1}{4n(n+1)}}$ ---(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

[redacted]

受験番号	

令和５年度
数 学 ②

問 題		
2		点

受験番号	

令和５年度 数 学 ② 解 答 紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻，
検査技術科学専攻）・薬・工 （４枚のうち，その２）

問 題		
2		点

$\boxed{2}$ の解答欄

①の $\boxed{2}$ 参照

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

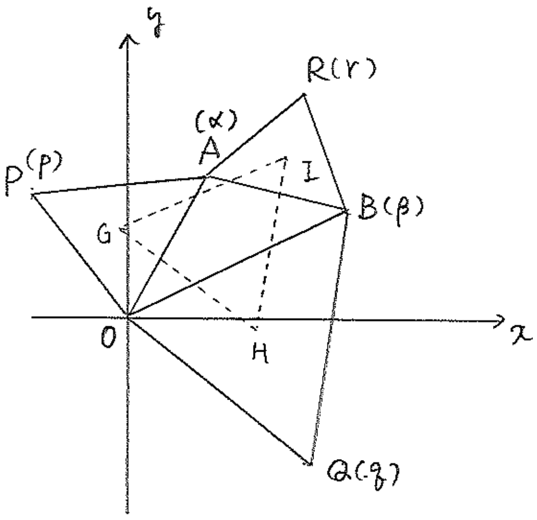
受験番号	

令和５年度 数 学 ② 解 答 紙

理・医（保健学科放射線技術科学専攻，
検査技術科学専攻）・薬・工 （４枚のうち，その３）

問 題	
3	点

3 の解答欄



（問1）

P(p), Q(q), R(r) とおくと

条件より $p=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha$ …（答）

$q=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta$ …（答）

$\dfrac{r-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ より $r=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}(\beta-\alpha)+\alpha$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\beta$ …（答）

（問2） G(z_1), H(z_2), I(z_3) とおくと

$z_1=\dfrac{p+\alpha}{3}=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{6}\alpha$ …（答）， $z_2=\dfrac{q+\beta}{3}=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{6}\beta$ …（答）

$z_3=\dfrac{\alpha+\beta+r}{3}=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{6}\alpha+\dfrac{3+\sqrt{3}i}{6}\beta$ …（答）

（問3）

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{(3-\sqrt{3}i)\alpha+(3+\sqrt{3}i)\beta-(3+\sqrt{3}i)\alpha}{(3-\sqrt{3}i)\beta-(3+\sqrt{3}i)\alpha}=\frac{\sqrt{3}\beta+(\beta-2\alpha)i}{\sqrt{3}(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta)i}$$

$$=\frac{3\beta(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta)(\beta-2\alpha)+\sqrt{3}\{\beta(\alpha+\beta)+(\beta-2\alpha)(\beta-\alpha)\}i}{3(\beta-\alpha)^2+(\alpha+\beta)^2}=\frac{2\{(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+\sqrt{3}(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)i\}}{4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}$$

ここで $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ のとき　G, H, I は一致するので 3点 G, H, I は三角形をなさない

すなわち $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\neq0$

このとき $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ と表せるので

$|z_3-z_1|=|z_2-z_1|$, $\arg\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{\pi}{3}$ となり △GHI は正三角形である。

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

受験番号	

令和５年度 **数 学 ② 解 答 紙**

理・医（保健学科放射線技術科学専攻，
検査技術科学専攻）・薬・工 （４枚のうち，その４）

問題		
4		点

4 の解答欄

（問１） $f'(x)=(2tx^2)'e^{-tx^2}+(2tx^2)\cdot(e^{-tx^2})'=4txe^{-tx^2}(1-tx^2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{t}}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より

$x=0$ で極小値 $f(0)=0$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{t}}$ で極大値 $f(\pm\frac{1}{\sqrt{t}})=\frac{2}{e}$ …（答）

（問２）

$$\int_1^{\sqrt{t}}4tx(1-tx^2)e^{-tx^2}\log x\,dx=\int_1^{\sqrt{t}}f(x)\log x\,dx$$

$$=\Big[f(x)\log x\Big]_1^{\sqrt{t}}-\int_1^{\sqrt{t}}f(x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=f(\sqrt{t})\log t^{\frac{1}{2}}+\int_1^{\sqrt{t}}(-2tx)e^{-tx^2}dx$$

$$=2t^2e^{-t^2}\times\frac{1}{2}\log t+\Big[e^{-tx^2}\Big]_1^{\sqrt{t}}$$

$$=(t^2\log t)e^{-t^2}+e^{-t^2}-e^{-t}\ \cdots（答）$$

（問３）

$(左辺)-(右辺)=(t^2\log t)e^{-t^2}-(t^{\frac{5}{2}}-t^2)e^{-t^2}=t^2e^{-t^2}(\log t-\sqrt{t}+1)$

$h(t)=\log t-\sqrt{t}+1\ (1\leqq t\leqq 4)$ とおくと $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2-\sqrt{t}}{2t}$

$1<t<4$ のとき $h'(t)>0$ であるから $h(t)$ は単調に増加する。

$h(1)=\log 1-\sqrt{1}+1=0$ であるから $1<t<4$ の範囲で $h(t)>0$ が成り立つ。

$t^2e^{-t^2}>0$ であるから $1<t<4$ の範囲で $(左辺)-(右辺)>0$ が成り立つ。

したがって，$1<t<4$ のとき，不等式 $g(t)>(t^{\frac{5}{2}}-t^2+1)e^{-t^2}-e^{-t}$ が成り立つことが示された。

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。