受験番号

令和５年度　数学③解答紙

医(医学科)　（４枚のうち，その１）

問題		
1		点

1 の解答欄

(1) 目の出方の総数は 6^3

3回で 2, 5, 6 または 3, 4, 5 が出ればよく。順を考えて

$$P_3 = \frac{3!+3!}{6^3} = \frac{1}{18} \quad \cdots(答)$$

(2) 次の3つの場合がある。

(i) 2が2回, 3が1回, 5が1回, 1が$(n-4)$回

(ii) 2が1回, 5が1回, 6が1回, 1が$(n-3)$回

(iii) 3が1回, 4が1回, 5が1回, 1が$(n-3)$回

出る順も考えて

$$P_n = \frac{1}{6^n}\left\{\frac{n!}{2!(n-4)!}+\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{n!}{(n-3)!}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 6^n}\left\{n(n-1)(n-2)(n-3)+4n(n-1)(n-2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 6^n}(n+1)n(n-1)(n-2) \quad \cdots(答)$$

(3) n回目に出る目によって場合分けする。

(ア) n回目に2が出るとき

$n-1$回目までに30となればよいので

$30=2\times3\times5$, $30=5\times6$ とみて

$$\frac{1}{6^{n-1}}\left\{\frac{(n-1)!}{(n-4)!}+\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\right\}\times\frac{1}{6}$$

(イ) n回目に3が出るとき

$n-1$回目までに20となっていればよいので

$20=2\times2\times5$, $20=4\times5$ とみて

$$\frac{1}{6^{n-1}}\left\{\frac{(n-1)!}{2(n-4)!}+\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\right\}\times\frac{1}{6}$$

(ウ) n回目に4が出るとき

$n-1$回目までに15となっていて

$15=3\times5$ とみて

$$\frac{1}{6^{n-1}}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\times\frac{1}{6}$$

(エ) n回目に5が出るとき

$n-1$回目までに12となっていればよく

$12=2\times2\times3$, $12=3\times4$, $12=2\times6$ とみて

$$\frac{1}{6^{n-1}}\left\{\frac{(n-1)!}{2(n-4)!}+\frac{(n-1)!}{(n-3)!}+\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\right\}\times\frac{1}{6}$$

(オ) n回目に6が出るとき

$n-1$回目までに10となっていればよく

$10=2\times5$ とみて

$$\frac{1}{6^{n-1}}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\times\frac{1}{6}$$

(ア)〜(オ)は排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{6^n}\left\{\frac{(n-1)!}{(n-4)!}\times2+\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\times6\right\}$$

$$=\frac{1}{6^n}\left\{2(n-1)(n-2)(n-3)+6(n-1)(n-2)\right\}$$

$$=\frac{1}{6^n}\cdot2(n-1)(n-2)\left\{n-3+3\right\}$$

$$=\frac{2}{6^n}n(n-1)(n-2) \quad \cdots(答)$$

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

[redacted]

受験番号

令和５年度 **数学③解答紙**

医（医学科）　　（４枚のうち，その２）

問題		
2		点

$\boxed{2}$ の解答欄　（問1）$\vec{v}=(x_1,y_1)$，$\vec{w}=(x_2,y_2)$ とおくと

$$\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{e_1}=4\\ |\vec{v}|=2\sqrt{5}\\ \vec{v}\cdot\vec{e_2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4\\ x_1^2+y_1^2=20\\ y_1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4\\ y_1=-2\end{cases}\quad\therefore\ \vec{v}=(4,-2)$$

$$\begin{cases}\vec{w}\cdot\vec{e_1}=8\\ |\vec{w}|=8\sqrt{2}\\ \vec{w}\cdot\vec{e_2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=8\\ x_2^2+y_2^2=128\\ y_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=8\\ y_2=8\end{cases}\quad\therefore\ \vec{w}=(8,8)$$

よって $\overrightarrow{OA}=\vec{u}=-\vec{e_1}=(-1,0)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(-1,0)+(4,-2)=(3,-2)$

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(3,-2)+(8,8)=(11,6)$

ゆえに $\underline{A(-1,0),\ B(3,-2),\ C(11,6)}$ …（答）

（問2）3点A, B, C を通る円の方程式を

$x^2+y^2+px+qy+r=0$ とおく。

点A$(-1,0)$を通る　$1-p+r=0$　$\therefore\ r=p-1$ …①

点B$(3,-2)$を通る　$13+3p-2q+r=0$ …②

点C$(11,6)$を通る　$157+11p+6q+r=0$ …③

③−②より　$144+8p+8q=0$　$\therefore\ q=-p-18$ …④

①，④を②に代入　$13+3p-2(-p-18)+(p-1)=0$

$\therefore\ p=-8$

①，④より　$q=-10$，$r=-9$

ゆえに求める円の方程式は

$\underline{x^2+y^2-8x-10y-9=0}$ …（答）

$\left((x-4)^2+(y-5)^2=50\right)$

（問3）$\triangle ABC$の外心Pの座標は $(4,5)$

よって $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(12,6)$，$\overrightarrow{AP}=(5,5)$

ゆえに $\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|4\times6-(-2)\times12\right|=24$

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\left|4\times5-(-2)\times5\right|=15$

したがって

$\triangle ABC:\triangle ABP=24:15$

$=\underline{8:5}$ …（答）

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

受験番号

令和5年度 数学③解答紙

医(医学科)　　（4枚のうち，その3）

問題		
3		点

3 の解答欄

(1) $A(0, a)\ (a<0)$ とおく。

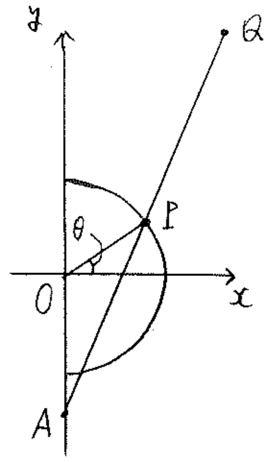
$AP=2$ より

$\cos^2\theta+(\sin\theta-a)^2=4$

$a^2-2a\sin\theta-3=0$

$a<0$ より

$a=\sin\theta-\sqrt{\sin^2\theta+3}$



よって，

$\overrightarrow{AQ}=4\overrightarrow{AP}=(4\cos\theta, 4\sqrt{\sin^2\theta+3})$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$

$=(4\cos\theta, \sin\theta+3\sqrt{\sin^2\theta+3})$

$\therefore\ Q\underline{(4\cos\theta, \sin\theta+3\sqrt{\sin^2\theta+3})}$ …(答)

(2) Qのx座標は

$\begin{cases}\theta=\pm\frac{\pi}{2}\text{ で 最小値 }0\\ \theta=0\text{ で 最大値 }4\end{cases}$ …(答)

$y(\theta)=\sin\theta+3\sqrt{\sin^2\theta+3}\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

$y'(\theta)=\cos\theta+\frac{3}{2}\cdot(\sin^2\theta+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{\cos\theta\,(3-8\sin^2\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta+3}\,(\sqrt{\sin^2\theta+3}-3\sin\theta)}$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ において，$y'(\theta)=0$ となる θ を α とすると，$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{3}{8}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

増減表は次のようになる。

θ	$-\frac{\pi}{2}$	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
$y'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$y(\theta)$	5	↘	極小	↗	7

$y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=5,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=7$

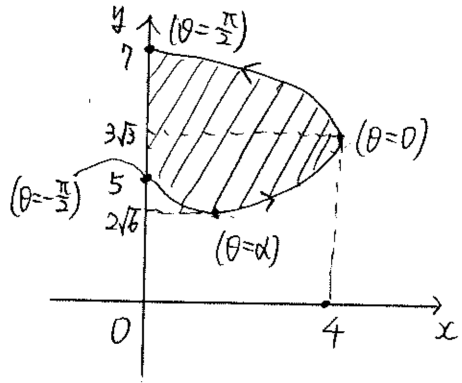
$y(\alpha)=-\frac{\sqrt{6}}{4}+3\sqrt{\frac{3}{8}+3}$

$=2\sqrt{6}$

よって，Qのy座標は

$\begin{cases}\theta=\alpha\text{ で 最小値 }2\sqrt{6}\\ \theta=\frac{\pi}{2}\text{ で 最大値 }7\end{cases}$ …(答)

(3) 点Qの軌跡は次のようになる。



曲線の $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ の部分を y_1，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分を y_2 とする。

求める面積Sは図の斜線部分で

$S=\int_0^4 y_2\,dx-\int_0^4 y_1\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}d\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} y\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{d\theta}d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+3\sqrt{\sin^2\theta+3})(-4\sin\theta)d\theta$

$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta+3\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+3})d\theta$

ここで，$\sin^2\theta$ は偶関数，$\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+3}$ は奇関数より

$S=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta$

$=4\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{2\pi}$ …(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

受験番号	

令和5年度
数学③

問題		
4		点

受験番号	

令和5年度 **数学③解答紙**

医(医学科)　(4枚のうち，その4)

問題		
4		点

4 の解答欄

(問1) 三平方の定理より

$\underline{d^2 = r_1^2 + r_2^2}$ ---(答)

(問2) C_1, C_2 のいずれにも直交する円の中心を $O'(X, Y)$，

半径を R とすると，

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = r_1^2 + R^2 \\ (X-p)^2 + Y^2 = r_2^2 + R^2 \end{cases}$$

この2式より，$2pX = p^2 + r_1^2 - r_2^2$.

$p > 0$ であるから，O' の軌跡は

$\underline{直線\ x = \dfrac{p^2 + r_1^2 - r_2^2}{2p}}$ ---(答)

(問3) 3つの円を，$C_1: x^2 + y^2 = r_1^2$，$C_2: (x-p)^2 + y^2 = r_2^2$，

$C_3: (x-q)^2 + (y-r)^2 = r_3^2$ とおいて一般性を失わない。ただし，$r_1 > 0, r_2 > 0, r_3 > 0$.

C_1, C_2 のいずれにも直交する円の中心 (X, Y) は

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = r_1^2 + R_1^2 \\ (X-p)^2 + Y^2 = r_2^2 + R_1 \end{cases} \quad (R_1 \text{は適当な正の数}) \text{ --- ①}$$

をみたし，同様に，C_2 と C_3，C_3 と C_1 について，

$$\begin{cases} (X-p)^2 + Y^2 = r_2^2 + R_2^2 \\ (X-q)^2 + (Y-r)^2 = r_3^2 + R_2^2 \end{cases} \text{ --- ②}$$

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = r_1^2 + R_3^2 \\ (X-q)^2 + (Y-r)^2 = r_3^2 + R_3^2 \end{cases} \text{ --- ③}$$

(R_2, R_3 は適当な正の数)

をみたす。

① から　$2pX = p^2 + r_1^2 - r_2^2$ ---①′

② から　$-2pX + 2qX + 2rY = -p^2 + q^2 + r^2 + r_2^2 - r_3^2$ ---②′

③ から　$2qX + 2rY = q^2 + r^2 + r_1^2 - r_3^2$ ---③′

①′，②′ から ③′ が得られ，3直線 ①′，②′，③′ のどの2つも平行でないとき交点はただ1つ存在する。

①，②，③ は $R_1 = R_2 = R_3$ としても成り立つから，題意の円はただ1つ存在する。

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。