受験番号	

令和６年度
数 学 ③

問題		点
1		

受験番号	

令和６年度 **数 学 ③ 解 答 紙**

医(医学科)　（４枚のうち，その１）

問題		点
1		

1 の解答欄

(問1) 袋A_kをえらぶ確率は $\frac{1}{n}$

また、袋A_kをえらんだとき、白玉がとりだされる確率は $\frac{k}{n}$

黒玉がとりだされる確率は $\frac{n-k}{n}$

よって、求める確率は

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot {}_2C_1\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{n-k}{n}$

$=\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(nk-k^2)$

$=\frac{2}{n^3}\{n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\}$

$=\frac{2}{n^3}\times\frac{1}{6}n(n+1)\{3n-(2n+1)\}$

$=\frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}$ ---(答)

(問2) $n=3k$のとき

袋A_kの中は白玉k個,黒玉$2k$個

よって、$P(t)={}_{100}C_t\left(\frac{k}{3k}\right)^t\left(\frac{2k}{3k}\right)^{100-t}$

$=\frac{{}_{100}C_t\cdot 2^{100-t}}{3^{100}}$ $(0\leqq t\leqq 100)$

∴ $0\leqq t\leqq 99$のとき

$P(t+1)=\frac{{}_{100}C_{t+1}2^{99-t}}{3^{100}}$ だから

$\frac{P(t+1)}{P(t)}=\frac{{}_{100}C_{t+1}\cdot 2^{99-t}}{{}_{100}C_t\cdot 2^{100-t}}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_{100}C_{t+1}}{{}_{100}C_t}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{100!}{(t+1)!(99-t)!}\cdot\frac{t!(100-t)!}{100!}$

$=\frac{100-t}{2(t+1)}$

∴ $\frac{P(t+1)}{P(t)}-1=\frac{98-3t}{2(t+1)}$

$0\leqq t\leqq 32$のとき $98-3t>0$

$33\leqq t\leqq 99$のとき. $98-3t<0$ だから

$0\leqq t\leqq 32$のとき，$P(t)<P(t+1)$

$33\leqq t\leqq 99$のとき，$P(t)>P(t+1)$

∴ $P(1)<P(2)<\cdots<P(33)>P(34)>\cdots>P(100)$

よって，$P(t)$が最大のとき

$t=33$ ---(答)

(問3) (問1)と同様に考えると

$q_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{10}C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^7$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{10}C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1-\frac{k}{n}\right)^7$

∴ $\lim_{n\to\infty}q_n=120\int_0^1 x^3(1-x)^7dt$

ここで，$I=\int_0^1 x^3(1-x)^7dx$において

$1-x=u$とおくと

$\frac{du}{dx}=-1$

∴ $I=\int_1^0(1-u)^3u^7(-du)$

$=\int_0^1 u^7(-u^3+3u^2-3u+1)du$

$=\int_0^1(-u^{10}+3u^9-3u^8+u^7)du$

$=-\frac{1}{11}+\frac{3}{10}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}$

∴ $120I=-\frac{120}{11}+36-40+15$

$=-10-\frac{10}{11}+11$

$=\frac{1}{11}$

よって，$\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{11}$ ---(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

[redacted]

受験番号	

令和６年度
数 学 ③

問 題		
2		点

受験番号	

令和６年度 **数 学 ③ 解 答 紙**

医(医学科) （４枚のうち，その２）

問 題		
2		点

$\boxed{2}$ の解答欄

数学② . $\boxed{3}$ と同じ

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

受験番号	

令和６年度
数 学 ③

問 題		
3		点

受験番号	

令和６年度 数 学 ③ 解 答 紙

医(医学科)　　（４枚のうち，その３）

問 題		
3		点

3 の解答欄

(1) $f(x)=(1-\cos^2 x)-\cos x-1+k$

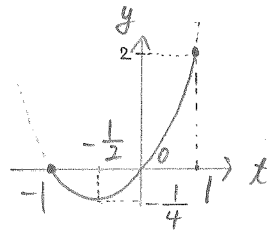
$=-\cos^2 x-\cos x+k$

$\cos x=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ とすると.

$\begin{cases} t=-1,\ 0<t\leqq 1 \text{ の } t \text{ 1つに対し, } x \text{ は1つ} \\ -1<t\leqq 0 \text{ の } t \text{ 1つに対し, } x \text{ は2つ} \end{cases}$

存在する。よって求める共有点の数は、

$\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=k$ より.



$\begin{cases} k<-\frac{1}{4},\ 2<k & \text{のとき} & 0 \\ 0<k\leqq 2, & 〃 & 1つ \\ k=-\frac{1}{4} & 〃 & 2つ \\ k=0 & 〃 & 3つ \\ -\frac{1}{4}<k<0 & 〃 & 4つ \end{cases}$ ……(答)

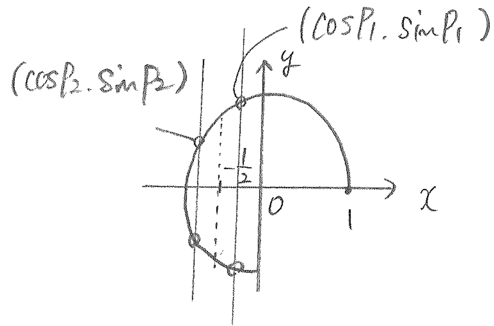
〃

(2) $-\frac{1}{4}\leqq k\leqq 0$ のとき

$\cos P_1,\ \cos P_2\ (-1\leqq\cos P_2\leqq\cos P_1\leqq 0)$ は

$t^2+t-k=0$ の２解となるので

解と係数の関係より



$\cos P_1+\cos P_2=-1,\ \cos P_1\cos P_2=-k,\ \cos P_1-\cos P_2=\sqrt{1+4k}$

$g(k)=\int_{P_1}^{P_2}(-\cos^2 x-\cos x+k)\cdot\sin x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{2}\cos^2 x+k\cos x\right]_{P_2}^{P_1}$

$=-\frac{1}{3}(\cos^3 P_1-\cos^3 P_2)-\frac{1}{2}(\cos^2 P_1-\cos^2 P_2)+k(\cos P_1-\cos P_2)$

$=-\frac{1}{3}\{(\cos P_1-\cos P_2)^3+3\cos P_1\cos P_2(\cos P_1-\cos P_2)\}-\frac{1}{2}(\cos P_1+\cos P_2)(\cos P_1-\cos P_2)$
$+k(\cos P_1-\cos P_2)$

$=\frac{1}{6}(1+4k)^{\frac{3}{2}}$

$-\frac{1}{4}\leqq k\leqq 0$ より $\begin{cases} k=0 \text{ で最大値 } \frac{1}{6} \\ k=-\frac{1}{4} \text{ で最小値 } 0 \end{cases}$ ……(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

受験番号

令和６年度 数 学 ③ 解 答 紙

医（医学科） （４枚のうち，その４）

問 題 4 点

4 の解答欄

(問1) $k^2-l^2=3^m \iff (k+l)(k-l)=3^m$ …①

k, l は自然数なので $k+l>0$，$k+l>k-l$

n を自然数として

(i) $m=2n$ のとき

①より

$k+l$	3^{2n}	3^{2n-1}	…	3^{n+1}
$k-l$	3^0	3^1	…	3^{n-1}

このとき k, l は正の整数となり

その個数は $n=\dfrac{m}{2}$ (個)

(ii) $m=2n-1$ のとき

①より

$k+l$	3^{2n-1}	3^{2n-2}	…	3^n
$k-l$	3^0	3^1	…	3^{n-1}

このとき k, l は正の整数となり

その個数は $n=\dfrac{m+1}{2}$ (個)

ゆえに (i)(ii) より ①を満たす自然数の組は

$\left.\begin{array}{l} m\text{が偶数のとき } \dfrac{m}{2} \text{ 個} \\ m\text{が奇数のとき } \dfrac{m+1}{2} \text{ 個} \end{array}\right\}$ …(答)

(問2) x が3の倍数でないとき

x と $x+3^m$ は互いに素である。

よって $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるための条件は

x，$x+3^m$ がともに平方数となることである。

$\begin{cases} x=l^2 \\ x+3^m=k^2 \end{cases}$ (k, l は自然数) とおくと

$l^2+3^m=k^2 \iff k^2-l^2=3^m$

ゆえに (問1) と同様に考えて

(i) $m=2n$ のとき $\begin{cases} k+l=3^{2n-p} \\ k-l=3^p \end{cases}$ $(p=0,1,\cdots,n-1)$

$\iff \begin{cases} k=\dfrac{3^{2n-p}+3^p}{2} \\ l=\dfrac{3^{2n-p}-3^p}{2} \end{cases}$ $(p=0,1,\cdots,n-1)$

$\therefore\ l=\dfrac{3^{m-p}-3^p}{2}$ $\left(p=0,1,\cdots,\dfrac{m}{2}-1\right)$

このうち3の倍数でないものは，$p=0$ のときのみ

(ii) $m=2n-1$ のとき $\begin{cases} k+l=3^{2n-1-p} \\ k-l=3^p \end{cases}$ $(p=0,1,2,\cdots,n-1)$

$\iff \begin{cases} k=\dfrac{3^{2n-1-p}+3^p}{2} \\ l=\dfrac{3^{2n-1-p}-3^p}{2} \end{cases}$ $(p=0,1,2,\cdots,n-1)$

$\therefore\ l=\dfrac{3^{m-p}-3^p}{2}$ $\left(p=0,1,2,\cdots,\dfrac{m-1}{2}\right)$

このうち，3の倍数でないものは $p=0$ のときのみ

(i)(ii)より，$x=l^2=\left(\dfrac{3^m-1}{2}\right)^2$ …(答)

(問3) x が3の倍数のとき

$x=3^q N$ (N は3の倍数でない自然数) とおくと

$q \geqq m$ のとき

$\sqrt{x(x+3^m)}=\sqrt{3^q N(3^q N+3^m)}=3^m\sqrt{3^{q-m}N(3^{q-m}N+1)}$

$3^{q-m}N$，$3^{q-m}N+1$ は互いに素より，平方数とならない。

$q<m$ のとき

$\sqrt{x(x+3^m)}=\sqrt{3^q N(3^q N+3^m)}=3^q\sqrt{N(N+3^{m-q})}$

$(m-q=m-1, m-2, \cdots, 2, 1)$

(問2)より，$m-q$ の値それぞれに対して，N の値すなわち x の値が1つずつ存在する。

以上より，$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x のうち，

3の倍数でないものは1個，3の倍数であるものは $m-1$ 個

したがって，求める自然数 x の個数は

$1+(m-1)=m$ (個) …(答)

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。

受験番号

令和６年度 **数 学 ③ 解 答 紙**

医（医学科）　（４枚のうち，その４）

問題 4 点

4 の解答欄　別解

(問1)

$k^2-l^2=3^m \iff (k-l)(k+l)=3^m$

$k-l=3^\alpha,\ k+l=3^\beta$

(α, β は $0 \leqq \alpha < \beta \leqq m$, $\alpha+\beta=m$ をみたす整数 …(*))

と表され，このとき

$2k=3^\beta+3^\alpha,\ 2l=3^\beta-3^\alpha$

2式の右辺はともに偶数だから，k, l はともに自然数として存在する。

よって，求める組 (k, l) の個数は (*) をみたす (α, β) の個数であり，それは $0 \leqq \alpha < \frac{m}{2}$ なる α の個数で

m が偶数のとき

$\alpha=0, 1, 2, \cdots, \frac{m}{2}-1$ の $\underline{\frac{m}{2}\text{個}}$ …(答)

m が奇数のとき

$\alpha=0, 1, 2, \cdots, \frac{m-1}{2}$ の $\underline{\frac{m+1}{2}\text{個}}$ …(答)

(問2), (問3)

$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるとき

$x(x+3^m)=y^2$ (y: 自然数)

と表され，このとき

$x^2+3^m x-y^2=0$

$x>0$ のとき

$$x=\frac{-3^m+\sqrt{3^{2m}+4y^2}}{2}$$

x が整数のとき

$3^{2m}+4y^2=z^2$ (z: 自然数)

と表されることが必要である。

逆に，このとき z は奇数であるから x は確かに整数となる。このとき

$(z-2y)(z+2y)=3^{2m}$

$z-2y=3^\gamma,\ z+2y=3^\delta$

(γ, δ は $0 \leqq \gamma < \delta \leqq 2m$, $\gamma+\delta=2m$ をみたす整数 …(**))

と表され，このとき

$2z=3^\delta+3^\gamma,\ 4y=3^\delta-3^\gamma$

(問1)と同様にして，z は自然数である。また，

$3^\delta-3^\gamma=3^{2m-\gamma}-3^\gamma=3^\gamma(3^{2(m-\gamma)}-1)$

について

$3^{2(m-\gamma)}-1=9^{m-\gamma}-1 \equiv 1^{m-\gamma}-1=0 \pmod 4$

であるから，y も自然数となる。

よって，考える x の個数は (**) をみたす (γ, δ) の個数であり，それは $0 \leqq \gamma < m$ なる γ の個数で

$\gamma=0, 1, 2, \cdots, m-1$ の $\underline{m\text{個}}$ …((問3)の答)

また，$\gamma \geqq 1$ のとき，z は3の倍数，すなわち x は3の倍数

$\gamma=0$ のとき，$z=\frac{3^{2m}+1}{2}$ となり

$$x=\frac{-3^m+z}{2}=\underline{\left(\frac{3^m-1}{2}\right)^2} \cdots ((問2)の答)$$

注意事項：解答は，必ず表面に記入すること。
裏面は採点の対象としません。