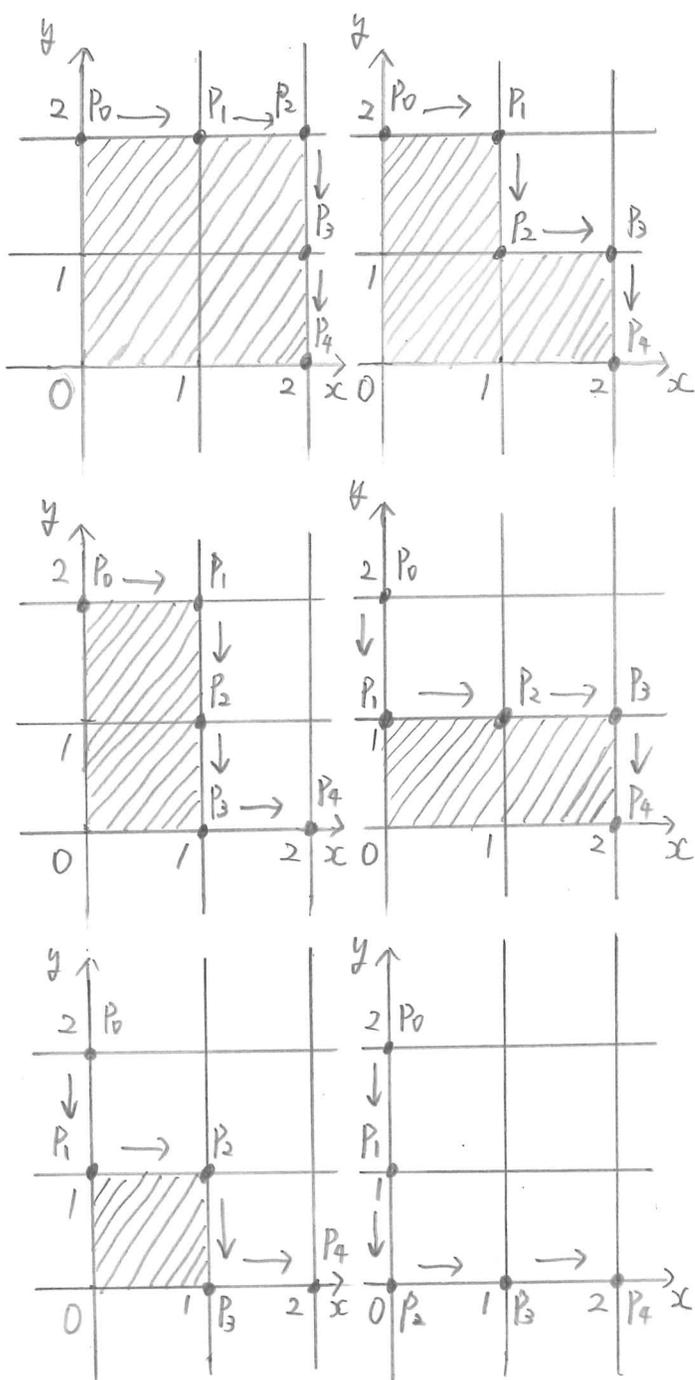


令和8年度 **数学① 解答紙**

教・医(保健学科看護学専攻)・情(文系型)・共  
(4枚のうち, その1)

1 の解答欄

移動の仕方は, 以下の6通りある。



(問1)

$S=0$ となる確率は  $\downarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow$  と移動するとき

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{9} \dots (\text{答})$$

(問2)

$S=2$ となる確率は  $\rightarrow\downarrow\downarrow\rightarrow, \downarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow$

と移動するとき

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9} \dots (\text{答})$$

(問3)

$S=1$ となる確率は  $\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow$  と移動するとき

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{27}$$

$S=3$ となる確率は  $\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow$  と移動するとき

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{27}$$

$S=4$ となる確率は  $\rightarrow\rightarrow\downarrow\downarrow$  と移動するとき

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{4}{9}$$

よて, 求める期待値は

$$\begin{aligned} & 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{2}{27} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{4}{27} + 4 \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{74}{27} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

2 の解答欄

(問1) 円  $C_{n-1}$  と 円  $C_n$  の中心の座標が

$(A_{n-1}, \frac{1}{4}A_{n-1}^2), (A_n, \frac{1}{4}A_n^2)$  であるから

$$\sqrt{(A_{n-1} - A_n)^2 + (\frac{1}{4}A_{n-1}^2 - \frac{1}{4}A_n^2)^2} = \frac{1}{4}A_{n-1}^2 + \frac{1}{4}A_n^2$$

両辺を平方して、整理して

$$(A_{n-1} - A_n)^2 = \left\{ \frac{1}{4}(A_{n-1}^2 + A_n^2) \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{4}(A_{n-1}^2 - A_n^2) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{16}(A_{n-1}^2 + A_n^2 + A_{n-1}^2 - A_n^2)(A_{n-1}^2 + A_n^2 - A_{n-1}^2 + A_n^2)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 2A_{n-1}^2 \cdot 2A_n^2 = \frac{1}{4}(A_{n-1}A_n)^2$$

よって証明された。

(問2)  $-2 < a_n < 0$  --- (\*)

(\*) を数学的帰納法により示す。

(i)  $n=1$  のとき  $-2 < c < 0$  であるから

$$a_1 = c \text{ より } -2 < a_1 < 0 \text{ より成り立つ}$$

(ii)  $n=k$  のとき成り立つと仮定すると

$$-2 < a_k < 0 \text{ --- (1)}$$

$$(a_{n-1} - a_n)^2 = \frac{1}{4}(a_{n-1}a_n)^2 \text{ より}$$

$$(a_k - a_{k+1})^2 = \frac{1}{4}(a_k a_{k+1})^2$$

すなわち

$$(a_k - a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k a_{k+1})(a_k - a_{k+1} + \frac{1}{2}a_{k+1}) = 0$$

$$a_k - a_{k+1} - \frac{1}{2}a_k a_{k+1} = 0 \text{ --- (2) とすると}$$

$$(2 + a_k) a_{k+1} = 2a_k$$

$$\text{つまり } a_{k+1} = \frac{2a_k}{2 + a_k}$$

$$\text{(1) より } a_{k+1} < 0$$

$$\text{よって } a_k < 0$$

$$-a_k - a_{k+1} < 0, a_k a_{k+1} > 0$$

よって成り立つ (2) に反する。

$$a_k - a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k a_{k+1} = 0 \text{ より}$$

$$(2 - a_k) a_{k+1} = 2a_k$$

(1) より  $2 < 2 - a_k < 4$  であるから

$$a_{k+1} = \frac{2a_k}{2 - a_k} < 0$$

$$a_{k+1} + 2 = \frac{2a_k}{2 - a_k} + 2$$

$$= \frac{2a_k + 2(2 - a_k)}{2 - a_k}$$

$$= \frac{4}{2 - a_k} > 0$$

よって  $-2 < a_{k+1} < 0$   $n=k+1$  で成り立つ

(i)(ii) より (\*) は成り立つ。

(問3) 問2の計算の過程より

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{2 - a_n} \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2 - a_n}{2a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ とおくと } b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2} \text{ --- (答)}$$

(問4)  $\{b_n\}$  は初項  $b_1 = \frac{1}{c}$ , 公差  $-\frac{1}{2}$  の等差数列なので

$$b_n = \frac{1}{c} + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 - c(n-1)}{2c}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{2c}{2 + c - cn} \text{ --- (答)}$$

**3** の解答欄

(問1)  $|\vec{OP}| = k|\vec{OP} - \vec{OA}|$  より  $|\vec{OP}|^2 = k^2(|\vec{OP}|^2 - 2\vec{OP} \cdot \vec{OA} + |\vec{OA}|^2)$

$$\therefore (k^2 - 1)|\vec{OP}|^2 - 2k^2\vec{OP} \cdot \vec{OA} + k^2|\vec{OA}|^2 = 0 \quad k \neq 1 \text{ かつ } \vec{OP} \neq \vec{OA} \text{ より}$$

$$\left| \vec{OP} - \frac{k^2}{k^2 - 1}\vec{OA} \right|^2 = \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2}|\vec{OA}|^2 - \frac{k^2}{k^2 - 1}|\vec{OA}|^2$$

$$= \frac{3bk^2}{(k^2 - 1)^2} \quad (\because |\vec{OA}|^2 = 3b)$$

$$\therefore \left| \vec{OP} - \frac{k^2}{k^2 - 1}\vec{OA} \right| = \frac{bk}{|k^2 - 1|} \text{ より}$$

点Pは  $\vec{OC} = \frac{k^2}{k^2 - 1}\vec{OA}$ ,  $\frac{bk}{|k^2 - 1|} = r$  とおくと 点Cを中心とし半径rの球面上の点である。

$k = 2$  とし  $\vec{OC} = \frac{4}{3}\vec{OA} = \left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$ ,  $r = 4$  であるから 求める方程式は

$$\left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{16}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = 16 \quad \dots (\text{答})$$

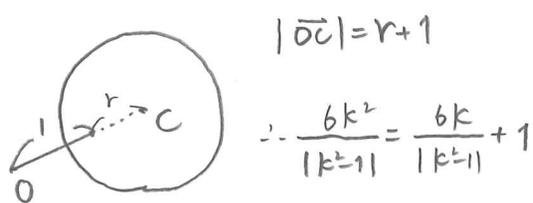
(問2)  $k = 2$  とし  $|\vec{OC}| = \frac{4}{3}|\vec{OA}| = 8 > 4$  であるから

原点Oは球の外部である。よって  $|\vec{OP}|$  の最小値は  $|\vec{OC}| - r = 8 - 4 = 4 \quad \dots (\text{答})$

## (問3)

最小値が1となるのは

(i) 原点Oが球の外部にあるとき



$$|\vec{OC}| = r + 1$$

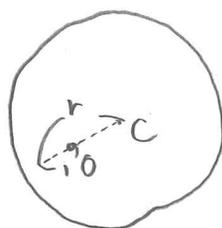
$$\therefore \frac{bk^2}{|k^2 - 1|} = \frac{bk}{|k^2 - 1|} + 1$$

$$\therefore 6k(k - 1) = |k^2 - 1|$$

$k > 1$  とし  $6k = k + 1$   
 $\therefore k = \frac{1}{5}$  となり不適

$0 < k < 1$  とし  $6k = -(k + 1)$   
 $\therefore k = -\frac{1}{7}$  となり不適

(ii) 原点Oが球の内部にあるとき



$$|\vec{OC}| = r - 1$$

$$\therefore \frac{bk^2}{|k^2 - 1|} + 1 = \frac{bk}{|k^2 - 1|}$$

$$\therefore 6k(1 - k) = |k^2 - 1|$$

$k > 1$  とし  $-6k = k + 1 \quad k = -\frac{1}{7}$   
 となり不適

$0 < k < 1$  とし  $6k = k + 1$   
 $k = \frac{1}{5}$  となり適する

よって求めるkの値は  $k = \frac{1}{5} \quad \dots (\text{答})$

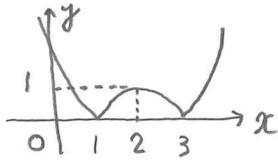
**4** の解答欄

(問1)  $C: y = |(x-1)(x-3)|$

$$= \begin{cases} (x-2)^2 - 1 & (x \leq 1, 3 \leq x) \\ -(x-2)^2 + 1 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

曲線Cは

右図



(問2) (i)  $x \leq 1, 3 \leq x$  のとき  
 $x^2 - 4x + 3 = x - \frac{3}{4}$  を

解して  $x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{2}$

これは  $x \leq 1, 3 \leq x$  をみたす。

(ii)  $1 \leq x \leq 3$  のとき

$-x^2 + 4x - 3 = x - \frac{3}{4}$  を

解して  $x = \frac{3}{2}$

これは  $1 \leq x \leq 3$  をみたす。

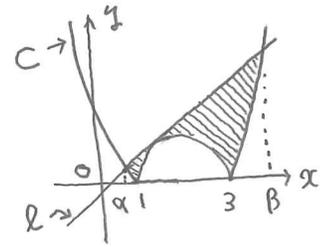
以上より 共有点は 3個 ... (答)

(問3)  $\alpha = \frac{5-\sqrt{10}}{2}, \beta = \frac{5+\sqrt{10}}{2}$  である。

$\beta^2 - \alpha^2 = (\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 5\sqrt{10}$  ... (答)

$\beta^3 - \alpha^3 = (\beta - \alpha)(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2)$   
 $= (\beta - \alpha)\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}$   
 $= \frac{85\sqrt{10}}{4}$  ... (答)

(問4) 右図 斜線部の  
 面積  $S$  を求める。



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{-(x-\alpha)(x-\beta)\} dx - 2 \int_1^3 \{-(x-1)(x-3)\} dx$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} - 2 \times \frac{(3-1)^3}{6}$$

$$= \frac{(\sqrt{10})^3}{6} - \frac{2 \times 2^3}{6}$$

$$= \frac{5\sqrt{10} - 8}{3} \quad \dots \text{(答)}$$